
DA
POSSIM
FIGERE
PEDEM
TERRAM
MOVEBO

Grundlehren der Statik

oder desjenigen Theiles

der Mechanik

welcher

vom Gleichgewichte bei festen Körpern und Maschinen handelt.

von

Abel Bürja,

Prediger, Professor der Mathematik, und Mitglied der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin.

Berlin und Libau,

bei Lagarde und Friedrich.

1789.

Vorrede.

Die Philosophen pflegen der Materie drei Haupt-Eigenschaften beizulegen, Theilbarkeit, Ausdehnung und Beweglichkeit; und darauf scheinen sich die drei ersten mathematischen Wissenschaften zu beziehen. Die Rechenkunst zählet die Theile, nicht die einfachen, welche vor unseren Sinnen verborgen sind, sondern die gröberen, welche die Natur uns als einzelne Wesen darstellet, wie auch die ein-eingebildeten, woraus wir willkürlich die natürlichen Dinge zusammensetzen. Die Geometrie lehret uns die Ausdehnung messen, und stützet sich zum Theile auf der Rechenkunst, weil man nicht anders als durch Einheiten und daraus entstehende Zahlen messen kann. Die Mechanik beschäftiget sich mit der Beweglichkeit und der wirklichen Bewegung; sie erfordert eine gründliche Kenntniß, sowohl der

Rechenkunst als auch der Meßkunst; der ersteren, weil Massen und Geschwindigkeiten, welche die Größe der Bewegung bestimmen, durch Zahlen vorgestellet werden; der anderen, weil Ausdehnung und Gestalt auch bei der Bewegung in Anschlag genommen werden müssen.

Die Mechanik gehöret also noch einigermaßen zur reinen Mathematik, oder sie ist vielmehr der Uebergang von der reinen zur angewandten. Ohne Rechenkunst und Meßkunst ist keine gründliche Mechanik möglich; und ohne Mechanik kann man weder in der Astronomie noch in der Baukunst, oder in anderen sowohl natürlichen als künstlichen mathematischen Lehren fortkommen. Man kann die Mechanik mit einem See vergleichen, der aus zwei Quellen sein Wasser erhält, welches er aber durch sehr viele Ströme wiederum ergießt, deren einige durch das Gebiet der Natur, andere aber durch die Gefilde der Kunst ihren Lauf nehmen.

Diesen See haben viele befahren, ehe noch jemand daran dachte, ihn gründlich zu untersuchen, seinen Umfang, seine Tiefe, seine Eigenschaften zu bestimmen. Ich will sagen, die Praxis in der Mechanik ist weit älter als die Theorie. Eine Art von Instinkt oder Naturtrieb lehrete den schwachen

Men=

Menschen seine Kräfte durch Hebel und andere einfache Werkzeuge verstärken, bevor er darauf verfiel, über die Wirkungen derselben nachzudenken. Nachdem aber die nöthigsten Hebezeuge schon vorhanden waren, so fanden sich Grübler, welche versuchten, das Erfundene zu erklären, zu beweisen, auch wohl zu verbessern und vermehren. So entstand der erste Theil der Mechanik, nämlich die Statik, indem man durch das Nachdenken über die Maschinen, auf die allgemeinen Regeln des Gleichgewichtes fester Körper zurückgeführet wurde.

Da man von jeher die Körper in feste und flüssige einzutheilen pflegte, so mußte man durch den guten Fortgang in der Statik aufgemuntert und gereizet werden, auch das Gleichgewicht der flüssigen Dinge zu betrachten; und aus dieser Betrachtung entstand die Hydrostatik als der zweite Theil der Mechanik. Bei diesen beiden Theilen blieb man lange Zeit stehen; bis tiefdenkende Männer die angefangenen Untersuchungen weiter fortsetzten. Sie bemerkten, daß ihre Vorgänger sich bloß an den Regeln des Gleichgewichts gehalten hatten, als welche zur Erklärung der Hebezeuge hinlänglich schienen; daß aber der Zustand der Bewegung bei den Körpern nicht minder merkwürdig ist als der

Zustand einer erzwungenen Ruhe, welchen man Gleichgewicht nennet. Folglich fingen sie an, zwei ganz neue Theile der Mechanik zu bearbeiten, nämlich die **Dynamik** und die **Hydrodynamik**, um die Bewegungen sowohl der festen als auch der flüssigen Körper auf die möglichst einfachen Gesetze zurückzuführen.

Also bestehet heutiges Tages die Mechanik aus vier Theilen, **Statik**, **Hydrostatik**, **Dynamik** und **Hydrodynamik**. Von diesen vieren wird im gegenwärtigen Werkchen nur die Statik allein abgehandelt; und wir wollen hier, unserem Gebrauche zufolge, die Geschichte dieses Theiles der Mechanik kürzlich erzählen. Wir nehmen sie aus dem Werke eines großen Meisters, nämlich aus des Herrn de la Grange Méchanique analytique. Dieser berühmte Mann, welcher auch in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften außerordentlich bewandert ist, erzählet die Schicksale der Statik ohngefähr folgendermaßen im ersten Abschnitte des angeführten Buches.

Der Zweck der Statik ist, die Gesetze oder allgemeinen Regeln anzugeben, wornach verschiedene Kräfte, die einander entgegen wirken, vernichtet werden, und ohne Erfolg bleiben. Drei solche Gesetze haben die Mechaniker vorzüglich in Vorschlag gebracht,

bracht, nämlich das Gesetz vom Gleichgewichte des Hebels, von der Zusammensetzung der Bewegungen, und von den virtuellen Geschwindigkeiten.

Archimedes, der einzige unter den Alten, von dem wir etwas Gründliches über die Mechanik haben, hat unter anderen Schriften zwei Bücher über das Gleichgewicht und die Schwerpunkte hinterlassen, und ist der Erfinder des Gesetzes vom Gleichgewicht des Hebels. Dieses Gesetz, wie ein jeder weiß, der die Anfangsgründe der Mechanik gelernet hat, bestehet darin, daß zwei Gewichte an einem geraden Hebel in Gleichgewicht sind, wenn sie sich umgekehrt verhalten wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkte, und daß der Ruhepunkt mit der Summe beider Gewichte belastet ist. Für den Fall, wo gleiche Gewichte in gleichen Entfernungen angebracht sind, nimmt Archimedes dies Gesetz als eine schon an sich selbst einleuchtende Wahrheit, oder wenigstens als eine allgemeine Erfahrung an. Auf diesen einfachen Fall führet er den anderen zurück, wo die Gewichte ungleich sind. Zu diesem Behufe vertheilet er die Gewichte, wenn sie kommensurabel sind, in verschiedene gleiche Theile. Ferner nimmt er an, daß die Theile jedes Gewichtes getrennet, und beider-

 seits

seits auf dem Hebel in gleichen Entfernungen angebracht werden; so daß der Hebel mit verschiedenen kleinen Gewichten beladen ist, welche alle in gleicher Entfernung von einander sind, und deren jeder Arm des Hebels gleich viel trägt. Daraus folgert er nun, daß, da jezt das Gleichgewicht Statt findet, es auch vorher, da die Gewichte noch ganz waren, ebenfalls eintreffen mußte. Hernach beweiset er seinen Lehrsatz auch für inkommensurable Gewichte, vermittelst der Exhaustions-Methode, und zeiget, daß solche Gewichte nicht in Gleichgewicht sein können, wenn sie sich nicht umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkte verhalten.

Einige unter den Neueren, wie Stevin in seiner Statik, und Galilei in seinen Gesprächen über die Bewegung, haben den archimedischen Beweis einfacher und leichter zu machen gesucht. Sie nehmen, anstatt beider Gewichte, zwei horizontale Parallelepipeden an, welche in ihrer Mitte am Hebel aufgehänget sind, gleiche Breite und Dicke haben, deren Längen aber doppelt so groß sind als die in umgekehrter Ordnung zustimmenden Arme des Hebels. Auf diese Art stehen beide Parallelepipeden in umgekehrtem Verhältnisse mit den Armen, woran sie hängen, ihre Enden stoßen genau an einander,

und

und sie machen zusammen ein einziges Parallelepipedon, dessen Mitte sich gerade unter dem Ruhepunkte befindet, so daß alles in Gleichgewichte bleiben muß.

Andere, welche den archimedischen Beweis für mangelhaft hielten, haben ihn auf verschiedene Art zu wenden versucht, um ihn strenger und vollständiger zu machen. Jedoch, den einzigen Huyghens ausgenommen, hat keiner bei den Mathematikern einen sonderlichen Dank verdienet.

Der Beweis des Huyghens gründet sich auf die Betrachtung einer Ebne, welche mit verschiedenen Gewichten beladen, und auf einer geraden Linie gestützet ist, auf welcher sie in Gleichgewicht bleibet. Obgleich dieser Beweis sinnreich ist, und nicht solche Schwierigkeiten hat, wie der archimedische, so könnte man doch auch noch Einwendungen gegen ihn machen. Wer ihn untersuchen will, wird ihn im ersten Theile der *Opera varia* des Huyghens antreffen.

Aus der Eigenschaft des geraden und horizontalen Hebels kann man die Gesetze des Gleichgewichts für die übrigen Maschinen herleiten, wie auch für jedes System von verschiedenen Kräften. Diesen Gang haben viele Schriftsteller genommen,

)(5 wie

wie unter andern de la Hire, in einer Abhandlung über die Mechanik, welche man im 9ten Bande der alten Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris antrift. Jedoch scheinet es, daß man nicht sogleich den rechten Weg gefunden hat, um alle Maschinen, hauptsächlich die schiefe Ebne, durch die Theorie des Hebels zu erklären. Denn aus den Bruchstücken, die vom 8ten Buche des Pappus übrig bleiben, siehet man, daß die Alten das wahre Verhältniß zwischen Kraft und Resistenz auf der schiefen Ebne nicht wußten; und die Bestimmung dieses Verhältnisses ist noch unter den ersten der neueren Mathematiker als eine schwere Aufgabe betrachtet worden. Die richtige Auflösung fand der berühmte Stevin, ein Mathematiker in Diensten des Prinzen Moriz von Nassau; jedoch fand er sie nur durch einen Umweg, und wußte sie nicht mit der Theorie des Hebels zu verbinden.

Stevin betrachtet ein körperliches Dreieck, welches auf seiner horizontalen Grundlinie oder Grundfläche aufgestellet ist, so, daß die beiden übrigen Seiten zwei schiefe Ebnen bilden. Nun legt er in Gedanken über dieses Dreieck einen Rosenkranz, der aus verschiedenen gleichen Gewichten bestehet, die in gleichen Entfernungen aufgefädnet sind, oder

viel-

vielmehr eine Kette von einförmiger Dicke, so daß der obere Theil der Kette auf beiden schiefen Ebnen anlieget, der untere aber frei unter der Grundfläche hängt, als wäre er an beiden Enden derselben befestiget. Nun behauptet Stevin, daß die Kette in diesem Zustande, wenn sie auch auf den Seiten des Dreiecks frei gleiten könnte, dennoch in Ruhe bleiben muß. Denn, wenn sie einmal anfinge zu gleiten, so müßte sie immer fort in derselbigen Richtung gleiten; weil dieselbe Ursach der Bewegung immer vorhanden wäre, indem die Kette, wegen der Einförmigkeit ihrer Theile, immer in derselbigen Lage auf dem Dreiecke bleibet; folglich müßte eine immerwährende Bewegung entstehen, welches unsinnig ist. Also müssen alle Theile der Kette nothwendig in Gleichgewicht sein. Nun aber ist der unter der Grundfläche hängende Theil schon offenbar von selbst in Gleichgewicht; folglich müssen die auf der einen schiefen Ebne liegenden Gewichte mit denen, die auf der anderen liegen, in Gleichgewicht sein. Es verhält sich aber die Summe der einen zur Summe der anderen, wie die eine Seite des Dreiecks zur anderen. Daraus folget, daß immer eine gleiche Kraft erforderlich ist, um ein Gewicht oder eine Summe von Gewichten auf einer schiefen Ebne in Gleichgewicht zu halten, wenn nur das ganze Gewicht nach dem Verhältnisse der Länge der schiefen Ebne zunimmt oder abnimmt, gesetzet, daß die Höhe unverändert bleibe. Ist nun die Ebne vertikal, so ist die erforderliche Kraft dem Gewichte gleich. Folglich verhält sich bei der schiefen Ebne die Kraft zum Gewichte, wie die Höhe der Ebne zu ihrer Länge, (vorausgesetzet, daß die Richtung der Kraft mit der Ebne parallel ist.)

Dieser Beweis des Stevin verdiente hier angeführet zu werden, weil er sehr sinnreich, aber wenig bekannt ist. Uebrigens leitet Stevin aus dieser Theorie das Gleichgewicht dreier Kräfte her, die auf einen Punkt wirken; und beweiset, daß das Gleichgewicht Statt findet, wenn die drei Kräfte mit den drei Seiten irgend eines Dreiecks parallel und proporzioniret sind. Man sehe die Grundsätze der Statik dieses Verfassers, wie auch seine Hypomnemata Mathematica, worin man Zusätze zu seiner Statik findet.

Das zweite Grundgesetz der Statik betrift die Zusammensetzung der Bewegung. Es ist nämlich bekannt, daß, wenn ein Körper nach zwei verschiedenen Richtungen zugleich einförmig beweget

wird,

wird, er alsdann die Diagonal-Linie eines Parallelogramms durchläuft, dessen Seiten er vermöge der einzelnen Bewegungen durchlaufen würde. Daher schließt man, daß zwei Kräfte, welche zugleich auf einen Körper wirken, um ihn einförmig zu bewegen, eben so viel gelten, als eine einzige, deren Größe und Richtung durch die Diagonal-Linie eines Parallelogramms vorgestellet wird, dessen Seiten die Richtungen und Größen der beiden vorstellen. Dieses ist also das Gesetz von der Zusammensetzung der Bewegungen oder der Kräfte.

Diese Grundwahrheit allein ist hinreichend, um die verschiedenen einzelnen Gesetze des Gleichgewichtes in allen Fällen zu bestimmen. Denn wenn man nach und nach alle vorhandene Kräfte, zwei und zwei zusammensetzet, so muß man zulezt eine einzige bekommen, die eben so wirket, als alle zusammen, und die folglich im Falle des Gleichgewichtes null sein muß, gesezt, daß im Systeme kein unbeweglicher Punkt sei; ist aber ein solcher Punkt im Systeme, so muß die Richtung der gedachten zusammengesezten Kraft durch diesen Punkt gehen. Eine weitläuftigere Erörterung dieses Lehrsatzes findet man in vielen Büchern, die von der Statik handeln, vorzüglich aber in der neuen Mechanik

von

von Varignon, wo dieser Verfasser die ganze Theorie der Maschinen einzig und allein aus diesem Grunde herleitet.

Des Stevin Lehrsatz von dem Gleichgewichte dreier Kräfte, die mit den Seiten irgend eines Dreiecks gleichlaufend und gleichverhaltend sind, ist augenscheinlich eine unmittelbare und nothwendige Folge des Grundsatzes von der Zusammensetzung der Kräfte: oder vielmehr ist es dieser Grundsatz selbst, der nur unter einer anderen Gestalt vorgetragen ist. Hingegen hat dieser den Vorzug, daß er sich auf einfachen und natürlichen Begriffen gründet, da hingegen Stevins Theorie nur durch einen Umweg erfunden worden.

Die Ehre der Erfindung des Grundgesetzes, wovon jezt die Rede ist, scheinet dem Galilei zu gehören. Denn im zweiten Satze des vierten Tages seiner Gespräche beweiset er, daß, wenn ein Körper zugleich in einer horizontalen und in einer vertikalen Richtung, mit einförmigen Geschwindigkeiten beweget wird, er eine Geschwindigkeit bekommen muß, welche durch die Hypotenuse des rechtwinklichten Dreiecks vorgestellet wird, dessen Katheten beide einzelne Geschwindigkeiten vorstellen. Es scheinet aber, daß Galilei die Wichtigkeit

dieses

dieses Lehrsatzes, in Betreff der Theorie des Gleichgewichts, nicht einsah. Denn im dritten Gespräche, wo er von der Bewegung schwerer Körper auf schiefen Ebnen handelt, gebrauchet er nicht den Lehrsatz von der Zusammensetzung der Bewegungen, um die relative Schwere eines Körpers auf einer solchen Ebne geradezu zu bestimmen; sondern er nimmt seine Zuflucht zur Theorie des Gleichgewichts auf schiefen Ebnen, und berufet sich auf dasjenige, was er in seiner Abhandlung della Scienza Mecanica davon gesagt hatte; in diesem Werke aber leitet er das Gleichgewicht auf schiefen Ebnen aus der Theorie des Hebels ab.

Man findet ferner die Theorie der zusammengesezten Bewegungen bei Descartes, Roberval, Mersenne, Wallis, u. s. f. Hingegen hat Varignon am ersten den Gebrauch dieser Theorie in Rücksicht auf das Gleichgewicht der Maschinen gezeiget. Im Jahre 1687 gab er sein Projet d'une nouvelle Méchanique heraus, worin sein einziger Zweck ist, die Regeln der Statik durch die Vertheilung der Bewegungen oder der Kräfte zu beweisen. Dieses Vorhaben hat er in der Folge in seiner nouvelle Méchanique ou Statique ausgeführet, welches Buch aber erst nach seinem Tode, im Jahre

1725 zum Vorschein gekommen ist. Schon im Jahre 1685 hatte er in der Histoire de la République des Lettres eine Abhandlung über die Rollen einrücken lassen, wo er die Theorie derselben aus der Zusammensetzung der Bewegungen herleitete.

Nun kommen wir zum dritten Hauptgesetze des Gleichgewichts, welches sich auf die virtuellen Geschwindigkeiten beziehet. Unter der virtuellen Geschwindigkeit verstehet man diejenige, welche ein Körper, der zu einem Systeme gehöret, das in Gleichgewicht ist, bekommen müßte, falls das Gleichgewicht gehoben würde, oder eigentlich diejenige Geschwindigkeit, die der Körper im ersten Augenblicke der Bewegung haben würde; und das Grundgesetz bestehet darin, daß die Kräfte in Gleichgewicht sind, wenn sie sich umgekehrt verhalten, wie ihre virtuellen Geschwindigkeiten, welche aber nach der Richtung jeder Kraft geschätzet werden müssen.

Man braucht nur die Bedingungen des Gleichgewichts beim Hebel und bei anderen Maschinen etwas aufmerksam zu betrachten, um sich von der Wahrheit dieses Grundsatzes zu überzeugen. Jedoch scheinet es nicht, daß die Mathematiker vor Galilei Zeiten davon Kenntniß gehabt haben; und

Herr

Herr de la Grange glaubet, daß die Entdeckung desselben wiederum diesem Gelehrten gehöret, welcher ihn sowohl in seiner Scienza Mecanica als auch in seinen Gesprächen über die Bewegung, als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts der Maschinen anführet. Man lese besonders die Anmerkung über den zweiten Satz des dritten Gespräches.

Das Moment einer Kraft, die an einer Maschine wirket, ist, der Erklärung des Galilei zufolge, der Nachdruck, die Wirkung, der *impetus* der Kraft, um die Maschine in Bewegung zu setzen; so daß alles in Gleichgewicht bleiben muß, wenn zwei Kräfte mit gleichen Momenten auf eine Maschine wirken, und sich bestreben, sie in entgegengesezten Richtungen zu bewegen. Er zeiget aber, daß das Moment einer Kraft sich allemal verhält, wie das Produkt aus ihrer Größe und ihrer virtuellen Geschwindigkeit, welche Geschwindigkeit von der Einrichtung der Maschine, wie auch von der Richtung und Lage der Kraft abhängt.

Diese Bedeutung des Wortes Moment ist auch von Wallis in seiner 1669 herausgegebenen Mechanik beibehalten worden. Dieser Verfasser nimmt die Gleichheit der Momente zum Grundgesetze der Statik an, und leitet daraus die Theorie des Gleichgewichtes bei den vornehmsten Maschinen ab.

Heut zu Tage heißt **Moment** weiter nichts als das Produkt aus der Größe einer Kraft und aus der Entfernung ihrer Richtung von einem gegebenen Punkte oder einer gegebenen Linie, das heißt, aus der Länge des Hebel-Armes, vermittelst dessen sie wirket. Jedoch scheinet die Erklärung des Moments nach Galilei und Wallis natürlicher und allgemeiner zu sein; und es ist nicht einzusehen, warum man sie gegen eine andere vertauschet hat, welche nur in einigen Fällen, z. E. bei dem Hebel, eine Größe anzeiget, die mit dem wahren Momente gleichverhaltend ist.

Auch Descartes hat die ganze Statik auf einen einzigen Grundsatz zurück geführet, welcher im Grunde mit dem Galileischen übereinstimmet, aber nicht so allgemein dargestellet ist. Dieser Grundsatz bestehet darin, daß eine gleiche Kraft erforderlich ist, entweder um ein gewisses Gewicht bis zu einer gegebenen Höhe zu heben, oder um ein *n*faches Gewicht zu einer *n*mal geringeren Höhe, oder auch ein *n*mal kleineres Gewicht zu einer *n*fachen Höhe zu heben. (Siehe den 73sten Brief im ersten Theile der Sammlung seiner Briefe, wie auch seine Mechanik

chanik in seinen hinterlassenen Werken.) Aus dem Grundsatze des Descartes folget, daß zwei Lasten in Gleichgewicht bleiben müssen, wenn sie an einer Maschine so angebracht sind, daß ihre gleichzeitigen, vertikalen und entgegengesezten Wege sich umgekehrt wie die Lasten selbst verhalten. Man merke aber, daß bei der Anwendung dieses Grundsatzes auf verschiedene Maschinen, nur die im ersten Augenblicke der Bewegung durchlaufenen Räumchen betrachtet werden müssen, weil man sonst die wahren Bedingungen des Gleichgewichts nicht erhalten würde.

Uebrigens mag man den Grundsatz von den virtuellen Geschwindigkeiten entweder mit Galilei bloß als eine allgemeine Eigenschaft, die bei dem Zustande des Gleichgewichtes bemerket wird, oder mit Descartes und Wallis als die Ursache selbst des Gleichgewichts betrachten; so muß man gestehen, daß dieser Grundsatz so einfach ist, als man nur ein allgemeines Gesetz verlangen kann, wobei er sich noch durch seine Anwendbarkeit auf alle mögliche Fälle empfiehlt.

Torricelli, ein berühmter Schüler von Descartes, hat einen andern Grundsatz ausgedacht, der aber eigentlich nur eine Folgerung aus dem

Galileischen ist. Er saget, daß, wenn zwei Gewichte so mit einander verbunden sind, daß, wie man sie auch stellen möge, ihr gemeinsamer Schwerpunkt weder steigen noch sinken kann, sie alsdann in jeder Lage im Gleichgewicht bleiben müssen. Torricelli wendet diesen Lehrsatz nur auf die schiefe Ebne an; man kann sich aber leicht überzeugen, daß er auch bei den übrigen Maschinen statt findet. Man sehe seine Abhandlung von der beschleunigten Bewegung, welche 1644 erschienen ist.

Aus Torricellis Grundsatze ist ein anderer entstanden, wodurch einige Schriftsteller verschiedene statische Fragen etwas leichter als sonst aufgelöset haben. Es ist dieser: daß in einem Systeme schwerer Körper, die in Gleichgewicht sind, der gemeinsame Schwerpunkt allemal den möglichst niedrigen Ort einnimmt. Man weiß aus der Lehre vom Größten und Kleinsten (de maximis et minimis), daß der Schwerpunkt am niedrigsten ist, wenn das Differenzial seines Sinkens oder Fallens null ist, das heißt, wenn der Schwerpunkt weder sinket noch steiget, unterdessen, daß das System eine unendlich kleine Bewegung bekömmt.

Das Grundgesetz von den virtuellen Geschwindigkeiten kann in seiner ganzen Allgemeinheit folgenderweise vorgetragen werden.

Es

Es sei ein System von so vielen Körpern oder Punkten als man will, welche von verschiedenen Kräften gezogen oder zur Bewegung gereizet werden, so daß alles in Gleichgewicht bleibe. Nun bekomme das ganze System eine kleine Bewegung, so daß die Punkte oder Körper zu gleicher Zeit unendlich kleine Räumchen durchlaufen. Man bemerke, wie weit jeder Punkt oder Körper in der Richtung der Kraft, die auf ihn wirket, entweder vorwärts oder rückwärts gegangen ist, und man multiplizire jede Kraft durch den zustimmenden unendlich kleinen Weg; so muß die Summe aller Produkte null sein, indem man die in den Richtungen der Kräfte durchlaufenen Räumchen als positiv, die in entgegengesezter Richtung zurückgelegten aber als negativ betrachtet.

Johann Bernoulli ist der erste, der diese große Allgemeinheit des Grundsatzes von den virtuellen Geschwindigkeiten eingesehen hat, wie auch dessen Nutzen bei der Auflösung der statischen Aufgaben. Dieses siehet man aus einem Briefe, den er 1717 an Varignon schrieb, und welchen dieser im Anfange der 9ten Abtheilung seiner neuen Mechanik anführet, indem diese Abtheilung ganz dazu bestimmet ist, um die Wahrheit und den Nutzen dieses Satzes in sehr mannigfaltigen Fällen zu beweisen.

Der nämliche Grundsatz hat auch zu demjenigen Anlaß gegeben, welchen Maupertuis in den Pariser Mémoires für 1740 unter dem Namen des Gesetzes der Ruhe vorgeschlagen hat, und welchen Euler in den Berliner Mémoires für 1751 mehr entwickelt und erweitert hat. Endlich dienet der nämliche Satz noch einem neueren Gesetze des Gleichgewichts zum Grunde, welches den Herrn Marquis de Courtivon zum Urheber hat, und in den Pariser Mémoires für 1748 und 1749 anzutreffen ist.

Ueberhaupt läßt sich fast sicher vorher sagen, daß jedes allgemeine Gesetz des Gleichgewichtes, was noch erfunden werden könnte, im Grunde nichts anders sein wird, als das Gesetz von den virtuellen Geschwindigkeiten, entweder nur auf eine neue Art ausgedrücket, oder auch aus einem neuen Gesichtspunkte betrachtet. Dieses Gesetz hat hauptsächlich den Vorzug, daß es sich in eine allgemeine algebraische Formel übersetzen läßt, woraus man für jeden besonderen Fall die Bedingung des Gleichgewichts herleiten kann.

Bis hierher gehet dasjenige, was Herr de la Grange von der Geschichte der Statik anführet, und diesem berühmten Manne hat es der Leser zu verdanken, daß wir ihm eine so kurze, bündige und gründliche Nachricht von den bisherigen Bemühungen der Mathematiker in diesem Fache haben mittheilen können.

Von den drei Grundgesetzen, wovon eben die Rede war, haben wir im gegenwärtigen Werke das zweite, nämlich das Gesetz von der zusammengesezten Bewegung, zum Grunde der Statik gewählet. Das archimedische Gesetz vom Gleichgewichte des Hebels hätte zu viel Umwege erfordert, um die Theorien der gebräuchlichsten Maschinen daraus herzuleiten, indem es weder leicht noch natürlich ist, den Hebel in jeder Maschine, z. E. in der schiefen Ebne, in der Schraube, in der Seilmaschine zu finden. Jedoch, nachdem die Bedingung des Gleichgewichtes beim Hebel schon aus der Zusammensetzung der Kräfte bewiesen war, scheueten wir uns nicht, einige einfache Fälle durch den eingebildeten Hebel zu erklären. Der Archimedische Lehrsatz ist also hier bloß als ein Zusatz oder ein Corollarium des Hauptgesetzes zu betrachten; und man kann allemal die Beweise sowohl aus den schon anerkannten Folgerungen, als aus dem Hauptsatze selbst herleiten. Dieses erinnere ich deswegen, weil man mich vielleicht beschuldigen möchte, als wäre meine Statik nicht auf einem sondern auf zwei verschiedenen Hauptgesetzen gegründet, welches etwas unbequem sein möchte.

Das Grundgesetz von den virtuellen Geschwindigkeiten ist zwar sehr allgemein, und sehr bequem bei algebraischen Formeln; auch hat es Herr de la Grange mit dem besten Erfolg in seiner Méchanique analytique gebrauchet, um auch die schweresten Aufgaben in Betreff des Gleichgewichtes aufzulösen. Hingegen scheinet es nicht für Anfänger gemacht zu sein. Schon würde ein Anfänger Mühe haben, nur bloß den Sinn davon zu fassen; er würde nicht nur bei dem unendlich kleinen Räumchen selbst anstoßen, indem überhaupt das unendliche kleine allemal für einen Lehrling schwer zu begreifen ist; sondern er würde sich auch keinen richtigen Begriff von dem Fortrücken in der Richtung der Kräfte machen, welches mit gedachten Räumchen bei weitem nicht einerlei ist. Gesezt aber auch, der Lernende verstünde nun dieses Grundgesetz, so wäre es viel gefordert, wenn er es ohne Beweis und als eine einleuchtende Wahrheit annehmen sollte. Wir haben also bloß in einem Hauptstücke, welches allgemeine Betrachtungen über die Maschinen enthält, das Gesetz

von

von den virtuellen Geschwindigkeiten als eine Induktion, aus den besonderen Fällen des Gleichgewichts bei den Maschinen hergeleitet. Noch müssen wir den Leser warnen, daß wir bei dieser Gelegenheit das Wort virtuell in energisch verwandelt haben, weil wir schon vorher unter virtueller Geschwindigkeit etwas anderes verstanden hatten, nämlich diejenige Geschwindigkeit, welche ein zurückgehaltener Körper bekommen würde, wenn er ganz frei, ohne Verbindung mit irgend einem Systeme, bliebe.

Man siehet also, daß wir der Lehrart des Varignon getreu geblieben sind. Auch haben wir seine nouvelle Méchanique ou Sratique fleißig zu Rathe gezogen. Nebst diesem Buche sind am meisten nachgeschlagen worden de la Caille Leçons élémentaires de Méchanique, und des Professor Jantet Buch unter dem nämlichen Titel. Dann und wann haben uns auch Archimedes, Newton, Johann *Bernoulli*, *s'Gravesande*, *Pardies*, *Lamy*, Euler, *Antoni*, Kästner, *Cousin*, *Bézout*, Wiedeburg, durch ihre mathematische oder physiko-mathematische Werke gute Dienste geleistet. Auch einige neue Wendungen und neue Regeln wird der Leser in diesem Werke antreffen, wie z. E. bei der Theorie der Archimedischen

Schrau-

Schraube, die hier mit unter die statischen, oder sogenannten **trocknen** Maschinen gezählet wird, indem wir mit Jantet den Fall betrachten, wo anstatt Wasser, eine Kugel in der Röhre laufet.

Der Plan der gegenwärtigen Statik ist folgender.

Das erste Hauptstück handelt von der Schwere, Masse und Dichtigkeit der Körper. Ich weiß wohl, daß der Druck, welchen schwere Körper niederwärts ausüben, unter dem allgemeineren Falle begriffen ist, wo parallele Kräfte auf die Punkte oder Theile eines Systemes wirken. Auch ist mir nicht unbewußt, daß Masse und Dichtigkeit nicht nothwendig den Begriff vom Gewichte voraussetzen. Ferner glaube ich, daß es für einen Gelehrten sehr schön und reizend ist, wenn man alles Besondere und Einzelne aus sehr allgemeinen Eigenschaften der Dinge herleitet. Hingegen muß man mit einem Anfänger ganz anders verfahren, und mit ihm erstlich von solchen Dingen reden, die ihm schon bekannt sind, und die er täglich vor Augen hat. Sein Verstand ist noch zu kurzsichtig, um sehr allgemeine Wahrheiten zu übersehen. So wie der Mensch die Arten und Gattungen der Dinge nur aus dem Anschauen einzelner Dinge kennen lernet, so muß auch der Stu-

diren-

direnbe erstlich viel einzelne Wahrheiten sammlen, um in der Folge allgemeine Lehrsätze daraus zu ziehen. Deswegen mache ich mit der Schwere und dem Gewichte, als mit sehr bekannten Sachen, den Anfang. Vermittelst des Gewichtes lernet man leicht die Massen und Dichtigkeiten der Körper vergleichen, wovon der Lernende sonst nur sehr dunkle und unbestimmte Begriffe haben würde. Jedoch wird ihm bei Zeiten beigebracht, daß Schwere und Masse nicht einerlei, sondern nur gleichverhaltende Dinge sind. Bei Gelegenheit der Gleichung zwischen Masse, Dichtigkeit und Größe, zeige ich, wie aus dieser Gleichung und aus ähnlichen, auf eine ganz unmittelbare Art, eine Menge von Verhältnissen gefolgert werden kann. Diese nützliche Methode, die man selten in mechanischen Lehrbüchern antrifft, nimmt hier nicht mehr als den 19ten und 20sten Paragraph ein. Hierauf folgen verschiedene Erläuterungen über Maaß und Gewicht, nebst kurzen Tabellen, wobei ich verschiedene Bücher gebrauchet habe, als Peschecks Rechenbücher, die französische Encyclopédie, Krusens Kontoristen, Schulzens Tabellen, Brodhagens Dynamik.

Im zweiten Hauptstücke findet man alle Erklärungen, die sich auf die Bewegung und damit verknüpfte Begriffe beziehen. Hier wird also geredet von den bewegenden Kräften; von dem Unterschiede der Körper, in sofern sie fest oder flüssig, elastisch oder unelastisch sind; von der geraden oder krummen Bahn und von der Richtung derselben; von Zeit und Geschwindigkeit; von einförmiger und abwechselnder Bewegung; von den Regeln der einförmigen Bewegung; endlich von dem Maaße der Kräfte durch die Massen und Geschwindigkeiten der bewegten Körper, und den daraus entstehenden Gleichungen. Dieses alles scheinet mehr zur Dynamik als zur Statik zu gehören. Da es aber zur Einsicht des Folgenden nöthig war, so konnte es an diesem Orte nicht weggelassen werden. Denn die Statik ist eigentlich nur ein besonderer Fall der Dynamik, wo nämlich entgegengesezte Kräfte ihre gegenseitigen Wirkungen aufheben, so daß ein Gleichgewicht entstehet. Weil aber dieser Fall am leichtesten zu untersuchen ist, so pfleget man damit den Anfang zu machen.

Im dritten Hauptstücke folgen die Gesetze der Bewegung und des Gleichgewichts, und diese lezteren werden aus jenen hergeleitet. Hier kömmt vornehmnehmlich der berühmte Lehrsatz von der Zusammensetzung zweier Bewegungen oder zweier Kräfte zum Vorschein. Wir haben uns nicht getrauet, ihn für eine strenge bewiesene Wahrheit auszugeben, sondern suchen ihn nur durch ein ziemlich befriedigendes Räsonnement zu unterstützen, und folgern dann daraus die bekannten Regeln des Gleichgewichts, zum Exempel daß drei Kräfte, die in Gleichgewicht sind, sich zwei und zwei umgekehrt verhalten, wie die Sinusse der Winkel, die ihre Richtungen mit der Richtung der dritten machen. Keines der drei Hauptgesetze der Statik, wovon eben geredet worden, ist bisher mit der größten mathematischen Strenge bewiesen worden. Vielleicht ist hier ein solcher vollkommner Beweis unmöglich. Denn, wo könnte man ihn hernehmen? nicht anders als aus irgend einem noch allgemeineren Gesetze; und dann müßte dieses als das wahre Grundgesetz angesehen werden. In den physiko = mathematischen Wissenschaften bleibet uns nichts übrig, als daß wir gewisse Gesetze als sehr wahrscheinliche und durch die Erfahrung bestätigte Regeln annehmen, welche nur alsdann zur völligen Gewißheit erhoben werden, wenn man siehet, daß alle daraus hergeleitete Folgerungen ihre Richtigkeit haben, und ebenfalls

mit

mit der Erfahrung übereinstimmen. Das dritte Hauptstück endiget sich mit einigen Erfahrungen und Hypothesen, welche theils die Wirkung der Schwere, und theils die Richtungen der Kräfte betreffen.

Da nun der Lehrling genugsam vorbereitet ist, so schreitet er mit dem vierten Hauptstücke zur Theorie des Hebels und der Waage, als der einfachsten Maschinen, die sich gedenken lassen. Hier lernet er folglich das Gleichgewicht bei allerlei theils geraden theils krummen Hebeln bestimmen, und dieses bei allen möglichen Richtungen der Kräfte; ferner wie drei Kräfte beschaffen sein müssen, wenn sie an einem freien Hebel ohne Ruhepunkt in Gleichgewicht sein sollen; wie eine gemeine Waage beschaffen ist, und was mit ihr vorgehet, wenn die Welle in, über oder unter der Axe des Balkens lieget; wie die Robervalsche Waage beschaffen ist; was bei einer Schnellwaage zu beobachten ist, sie mag gerade oder krumm sein; wie mehr als zwei Lasten an einem Waagebalken in Gleichgewicht sein können, und was bei der Waage das **Moment** eines Gewichts heißt; endlich wie man sich durch die mechanische Arithmetik in der Berechnung der Momente üben kann.

Die

Die Momente führen so natürlich auf die Schwerpunkte, daß ich diese sogleich im fünften Hauptstücke vorgenommen, und die Lehre von den übrigen Maschinen bis zum folgenden aufgeschoben habe. Erstlich wird bewiesen, daß jeder Körper einen und nur einen Schwerpunkt hat. Es wird gezeiget, daß man ihn durch bloße Versuche finden kann, und daß ein Körper ruhet, sobald nur sein Schwerpunkt unterstützet ist. Hierauf wird gelehret, daß sowohl verbundene als auch unverbundene und freie Körper allemal einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt haben, und wie er gefunden wird, es mögen die Körper entweder alle in einer geraden Linie, oder in einer Ebne, oder in verschiedenen Ebnen liegen. Nach diesen allgemeinen Lehren kömmt die Untersuchung der Schwerpunkte einzelner Figuren und Körper, und es wird erstlich gezeiget, daß bei symmetrischen Gestalten der Schwerpunkt allemal in der Mitte ist; hernach aber wird gelehret, wie die Schwerpunkte der Perimeter ebener Flächen, der Flächen selbst, der geometrischen Körper und ihrer Oberflächen bestimmet werden müssen.

Nach dieser Abhandlung von den Schwerpunkten, wird im sechsten Hauptstücke die Lehre von den Maschinen fortgesetzet, und das Gleichgewicht bei den gebräuchlichsten bestimmet. Ich bin bei der gewöhnlichen Ordnung der einfachen Maschinen geblieben, und bei Gelegenheit einer jeden derselben habe ich die bekanntesten zusammengesezten angeführet und erkläret. Denn obgleich der Unterschied zwischen einfachen und zusammengesezten Maschinen viel Willkürliches enthält, und die Ordnung bei allen ziemlich gleichgültig ist, so mußte doch irgend eine Ordnung gewählet werden, und die alte schien mir eben so gut als jede andere; ich hatte also keinen hinlänglichen Beweggrund, um mit einigen neueren Schriftstellern davon abzuweichen. Die Schraube habe ich mit unter die einfachen Maschinen gerechnet, weil sie in der That aus keinen anderen zusammengesetzet ist, obgleich man sie in Gedanken, und des Beweises wegen, in verschiedene schiefe und um einen Zylinder gewickelte Ebnen zerlegen kann. Die Seilmaschine habe ich mit verschiedenen Neueren hinzugethan, so daß hier die Anzahl der einfachen Maschinen bis sieben steiget, da sonst nur fünfe gezählet werden. Hätten die Alten diesen Gedanken gehabt, wie würden sie sich über diese heilige Zahl gefreuet haben, die auch in der Statik eintrifft. Von den sieben Maschinen würden sie eben solches Wunder gemacht haben, wie von den

sieben

sieben Planeten, den sieben Metallen, und den sieben Haupttönen in der Musik. Vielleicht gar hätten sie die sieben Maschinen wie die Metalle mit den Zeichen der Planeten beehret. Im sechsten Hauptstücke also (welches auch nach dem vierten hätte folgen können) trifft man an: die **Rolle** samt den Flaschenzügen; die **Winden** samt den Räderwerken; die **schiefe Ebne**; den **Keil**; die **Schraube**, sowohl die gemeine, als auch die archimedische Schraube, und die Schraube ohne Ende, nebst einer durch diese lezte verstärkten Wagenwinde; die **Seilmaschine**, sowohl mit einem Knoten als mit mehreren, nebst der Haupteigenschaft der Kettenlinie. Der **Hebel**, als die erste der einfachen Maschinen, kömmt hier nicht vor, weil er schon genugsam betrachtet worden. Endlich, da ich bei einigen Verfassern die **Blase** als Maschine betrachtet antreffe, so habe ich auch diese nicht gänzlich unberührt lassen wollen. Noch muß ich erinnern, daß ich in diesem Hauptstücke de la Caille und Jantet hauptsächlich benutzet habe.

Das siebente Hauptstück führet den Titel: **allgemeine Betrachtungen über die Maschinen.** Hier wird gehandelt von der Hinderniß, die aus der Steifigkeit der Stricke entstehet; von der Reibung und deren Wirkungen; von der wahren und richtigen Bestimmung der Fälle, wo ein Körper auf einer schiefen Ebne entweder gleitet oder sich wälzet, da die gemeine Regel falsch ist; von den Vorschriften, die man bei der Anordnung einer Maschine zu beobachten hat; von der eingeschränkten Wirkung der Maschinen, und dem Zeitverluste beim Gewinne an der Kraft. Zulezt wird das Gesez von den virtuellen oder (wie ich sie nenne) energischen Geschwindigkeiten aus den vornehmsten Maschinen abstrahiret. Hierbei habe ich Varignon zum Geleitsmann gebrauchet; bei den vorhergehenden Artikeln aber Jantet und Wiedeburg. Auch wird man bei Gelegenheit der Beweise für die virtuellen Geschwindigkeiten verschiedene Erläuterungen über die Maschinen antreffen, welche ich im sechsten Hauptstücke mit gutem Vorbedacht, und der Anfänger wegen, ausgelassen hatte.

Alle vorhergehende Hauptstücke sind überhaupt so verfasset, daß der Leser sie ohne viel vorläufige Kenntnisse verstehen kann. Die gewöhnlichsten Lehren der Arithmetik, Geometrie und Algebra sind dazu hinlänglich. Was höhere Kenntnisse erfordert, habe ich bis zulezt aufgeschoben. Im achten Hauptstücke werden demnach die Schwerpunkte der Linien, Flächen und Körper durch die Integral-Rechnung untersuchet und bestimmet, erstlich durch die strengere Methode der Gränzen nach Cousin, hernach aber auch durch die kürzere und gebräuchlichere Methode des unendlich Kleinen. Als ein Anhang erscheinet hier **Guldins Regel**, zur Berechnung des Inhalts einer Fläche oder eines Körpers aus der Bewegung des Schwerpunktes der erzeugenden Linie oder Ebne. Diese Regel wird durch viel Exempel erläutert, und es werden einige Folgerungen daraus gezogen.

Im neunten Hauptstücke wird die Gleichung der **Kettenlinie** nach Cousin und die Gleichung der **elastischen Linien** nach Johann Bernoulli gesuchet. Was diese Männer nur kürzlich und für Gelehrte angezeiget hatten, habe ich erläutert, weiter entwikkelt, und zur Fassung mehrerer Leser herabgestimmt.

Nun weiß also der Leser, was ich geleistet habe, oder wenigstens was ich habe leisten wollen. Mir kömmt es nicht zu, über meine eigne Arbeit zu urtheilen. Sachverständige werden mir entweder durch ihre gütige Nachsicht neuen Muth einflößen, oder durch ihren billigen Tadel neue Kenntnisse verschaffen.

Was die Schreibart betrifft, so beziehe ich mich auf dasjenige, was ich schon in mehreren Vorreden erinnert habe, daß ich nicht berechtiget bin, auf die größte Reinheit der deutschen Sprache Anspruch zu machen. Einige neue Redensarten habe ich hier, wie in meinen vorigen Werken, gewagt, weil mir keine andere von gleicher Bedeutung bekannt waren. Im Vortrage der Wissenschaften ist dieses ja von jeher erlaubt gewesen, wenn nur die nöthigen Wort-Erklärungen vorangehen. Die Bezeichnungen, welche man in meiner Algebra und Geometrie findet, werden auch hier gebrauchet. Eine geometrische Proporzion wird auf französische Art durch vier Punkte zwischen beiden Gliedern, und entweder ein Komma oder ein Kolon zwischen den Sätzen der Glieder, angedeutet: einen natürlichen Logarithmus bezeichne ich mit $\mathfrak{l}$ und einen Briggischen mit $\mathfrak{L}$; ein vollständiges Differenzial mit Δ, ein unvollständiges oder unendlich kleines mit $\mathfrak{d}$, ein Integral mit $\int$; den Sinus, den Sinus-versus, die Tangente und die Sekante eines Bogens mit $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{ß}$; den Kosinus, den Kosinus-versus, die Kotangente und die Kosekante mit $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{ß}'$. Dabei habe ich keine Neuerungssucht zum Beweggrund: denn was für Ehre bringt es ein, wenn

man

man alte Zeichen in neue verwandelt? ich will nur dem Anfänger zur Hülfe kommen, der die lateinischen Buchstaben sehr leicht mit denen, welche die Größen anzeigen, verwechseln könnte. Daß dieses leicht geschehen könne, will ich durch das Beispiel eines nicht zu verachtenden Mathematikers beweisen, der einen französischen Kommentar über des Marquis de l'Hopital Analyse des infiniment petits geschrieben hat. In seiner dritten Anmerkung will er beweisen, daß $\frac{y\,\partial x - x\,\partial y}{y^2}$ das Differenzial von $\frac{x}{y}$ ist. Zu diesem Behufe nimmt er an

1) $\frac{x}{y} = z$. Daher schließt er 2) $x = yz$, 3) $dx = z\,dy + y\,dz$, 4) $y\,dz = dx - z\,dy$, 5) $dz = \frac{dx}{y} - \frac{z\,dy}{y}$, 6) $dz = \frac{dx}{y} - z\,d$, 7) $dz = \frac{dx}{y} - \frac{x\,d}{y}$, 8) $dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$. Wer siehet nicht, daß hier in der 6sten und 7ten Gleichung das Zeichen d als eine Größe behandelt worden, und daß das Resultat nur zufälliger Weise richtig heraus kömmt? Hätte der Verfasser ein bequemeres Zeichen gebrauchet, so würde ihm gewiß ein solches Versehen nicht entwischt sein.

Um auf mein Werk zurückzukommen, so wird es dem Käufer nicht unangenehm sein, daß ich zur Ersparung der Kosten, bei den Figuren alle überflüssige Malerei weggelassen, und meistens nur die Umrisse der Maschinen gezeichnet habe. Es ist nicht nöthig, daß ein mathematisches Werk zugleich ein Bilderbuch vorstelle. Holzschnitte habe ich deswegen gewählet, weil sie sich bequemer in den Text einrücken lassen, und dadurch dem Leser das Aufschlagen und Nachsuchen ersparen.

Mehr habe ich für jezt nicht zu erinnern. Wenn meine Werke zur Ausbreitung und Beförderung mathematischer Kenntnisse etwas beitragen können, so soll mich die angewandte Mühe, die bei solchen Arbeiten größer ist als mancher sichs vorstellet, nie gereuen.

Nachschrift.

Der allgemeinen Meinung zufolge, habe ich in dieser Vorrede (Seite XIV) dem Galilei die Ehre der Erfindung vom Gesetze der zusammengesezten Bewegung zugeeignet. Bei einer nähern Untersuchung finde ich aber, daß dieses Gesetz schon dem Aristoteles bekannt gewesen ist, wie ich es in einer Abhandlung über die mathematischen Kenntnisse dieses Philosophen beweise, welche in den Berliner Mémoires erscheinen wird.

Inhalt der Hauptstücke.

Erstes Hauptstück.

Zweites Hauptstück.

Drittes Hauptstück.

Viertes Hauptstück.

Fünftes Hauptstück.

Sechstes Hauptstück.

Siebentes Hauptstück.

Achtes Hauptstück.

Neuntes Hauptstück.

(Eine ausführlichere Anzeige des Inhalts findet man in der Vorrede.)

Erstes Hauptstück.

Von der Schwere, Masse und Dichtigkeit der Körper.

§. 1.

Der Raum ist eine Ausdehnung in die Länge, Breite, und Tiefe. Oft wird auch eine Ausdehnung, welche sich bloß in die Länge und Breite, oder gar nur in der Länge erstrecket, ein Raum genannt.

§. 2.

Ein Raum ist leer, wenn sich nichts darinn befindet; hingegen ist er voll, wenn man darinn noch etwas anders, als die bloße Länge, Breite und Tiefe bemerken kann.

§. 3.

Materie ist alles was einen Raum anfüllet. Materielle Punkte oder physische Punkte sind die kleinsten Theile woraus die Materie bestehet.

§. 4.

Ein Körper ist ein jedes Ding was aus Materie bestehet, oder aus physischen Punkten zusammengesetzet ist.

§. 5.

Alle Materie, welche sich in der Nachbarschaft der Erde befindet, hat die Eigenschaft, daß sie sich beständig bestrebet, sich in senkrechten Linien der Erde zu nähern, und in dieselbe einzudringen. Diese Eigenschaft wollen wir die Fallkraft der Materie nennen. Wird demnach ein Körper durch nichts zurück gehalten, so fällt er senkrecht gegen die Erdfläche, oder vielmehr gegen die Fläche des stillstehenden Wassers. Und wenn die Erde ausgegraben oder ausgehöhlet ist, so setzet er diese senkrechte Linie fort, bis er nicht tiefer kommen kann. Auch durch das Wasser fallen viele Körper, bis sie den Grund erreichet haben.

§. 6.

Wird aber ein Körper zurück gehalten, so daß er nicht fallen könne, so bestrebet er sich dennoch herunter zu gehen, und äussert dieses Bestreben durch einen Druck, welchen er gegen dasjenige ausübet, was ihn zurückhält. Dieser Druck wird die Schwere des Körpers genannt. Wenigstens bringt es so der allgemeine Sprachgebrauch mit sich, obgleich verschiedene Gelehrten das Wort Schwere zur Bezeichnung der Fallkraft selbst gebrauchen.

§. 7.

Diese Schwere oder dieser Druck richtet sich nicht bloß nach der Größe des Körpers, sondern vielmehr nach der Menge Materie die in ihm enthalten ist. Denn, da jeder materielle Punkt sich bestrebet niederwärts zu gehen, und den Widerstand zu überwinden, so ist der Druck des ganzen Körpers desto größer, je mehr materielle Punkte in ihm enthalten sind, oder je mehr er Materie in sich faßet. Wenn also zwei Körper von gleicher Größe eine ungleiche Schwere haben, so kann man sicher daraus schließen, daß der schwerere am meisten Materie in sich faßet, und daß im leichteren mehrere leere Räume seyn müssen, welche nichts zur Schwere beitragen. Das Dasein solcher leeren Räume ist oft mit bloßen Augen sichtbar, wie zum Beispiel in einem Stücke Schwamm. Oft kann man sie nicht anders als durch gute Vergrößerungsgläser entdecken. Bei sehr vielen Körpern können sie aber weder mit unbewafneten noch mit bewafneten Augen gesehen werden,

son=

sondern man schließt bloß ihr Dasein aus der minderen Schwere des Körpers, in Vergleich mit andern Körpern von gleicher Grösse. Die leeren Räume zwischen den materiellen Theilchen werden die **Poren** des Körpers genannt. Meistens aber sind sie doch nicht vollkommen leer, sondern mit irgend einer Materie angefüllet, die von einer andern Art ist als diejenige, welche eigentlich zum Körper gerechnet wird. So sind zum Beispiel die Poren des Schwammes mit Luft, und oft mit Wasser angefüllet. In den meisten Fällen aber pfleget man alles dasjenige als eigene **Materie** des Körpers zu betrachten, was beständig in ihm bleibet, und die Schwere desselben vermehret.

§. 8.

Da die Körper eine ungleiche Schwere haben, so ist man darauf bedacht gewesen, die Schweren derselben zu vergleichen. Das Maaß oder die Einheit der Schwere ist willkührlich, so wie jedes andere Maaß. Man hat dazu die Schwere oder den Druck irgend eines Körpers von bekannter Größe und bekannter Materie genommen, zum Exempel eines eisernen, meßingenen, bleiernen oder steinernen Körpers von einer gewissen Größe, und hat ihn einen Zentner, ein Pfund, eine Unze, ein Loth genannt, u. s. w. Wenn nun ein Körper, dessen Schwere man bestimmen will, eben so sehr niederwärts drücket als zwei, drei, vier solche Pfunde, zum Beyspiel, so saget man, er wiege zwei, drei, vier Pfund u. s. w. Diese Gleichheit der Schwere oder des Druckes zu bestimmen, hat man bequeme Werkzeuge erfunden, welche **Wagen** genannt werden, und wovon in der Folge gehandelt werden soll. Jedoch kann man schon mit bloßen Händen die Körper ziemlich genau **abwägen**, hauptsächlich, wenn man sich lange Zeit darinn geübet hat.

Man nimmt nämlich auf der einen Hand den abzuwägenden Körper, und auf der anderen so viel von den Schweren-Maaßen, als nöthig sind, um einen Druck zu verursachen, welcher, der Empfindung nach, so stark sei, als der Druck des abzuwägenden Körpers. Ein solches Schweren-Maaß, wie ein Zentner, ein Pfund u. s. w. wird ein **Gewicht** genannt. Auch benennet man durch dieses Wort, die Anzahl der Einheiten, welche den Druck des abzuwägenden Körpers bestimmen. Drücket also ein Körper eben so stark, als vier Pfund-Gewichte, so saget man, das **Gewicht** des Körpers sei vier Pfund, oder der Körper **wiege** vier Pfund. Daher siehet man, daß das Gewicht eines Körpers nichts anders ist, als seine **bestimmte Schwere**. Auch werden oft im gemeinen Sprachgebrauche Gewicht und Schwere mit einander verwechselt.

§. 9.

Wenn man einen Körper wäget, so kömmt es darauf an, entweder bloß die ganze Schwere desselben zu erfahren, oder die Schwere seiner Materie mit der Schwere irgend einer andern Materie zu vergleichen. Die Schwere eines Körpers in sich selbst betrachtet, wird dessen **absolute Schwere**, oder **unbedingte Schwere** genannt. Hingegen, die Schwere einer Art Materie in Vergleich mit anderen Arten, heißt die **relative Schwere**, oder die **verglichene Schwere**. Um diese leztere zu bestimmen, muß man Körper von gleicher Größe nehmen, und jeden derselben besonders abwägen, so bekömmt man die absoluten Schweren dieser gleichen Körper; und eben deswegen, weil diese Körper gleich sind, so hat man die relativen Schweren, so daß man sagen kann, wie vielmal die eine Art Materie schwerer sei, als die andere. Z. E. Gesezt, man wäge einen Kubikfuß Regenwasser, und finde seine Schwere 70 Pfund Pariser Gewicht. Man wäge auch einen Kubikfuß des reinsten Goldes, und finde 1375 Pfund. So verhält sich die Schwere des Wassers, zur Schwere des Goldes, wie 70 zu 1375, oder wie 1 zu $19\frac{9}{14}$, das heißt, Gold ist $19\frac{9}{14}$ mal schwerer als Regenwasser.

§. 10.

Die Erfahrung lehret, daß in jedem Körper ein Punkt vorhanden ist, in welchem die ganze Schwere desselben sich gleichsam vereiniget, so daß es nur nöthig ist, diesen Punkt zu unterstützen, oder zu befestigen, um den ganzen Körper zu verhindern, daß er weder fallen noch sich umwenden könne, in welcher Lage er übrigens sich auch befinden möge. Zum Exempel, man nehme eine Stange, welche durchaus von gleicher Dicke und von gleichartiger Materie sei. Man nehme die Mitte derselben der Länge nach, und bohre ein Loch wiederum durch die Mitte der Dicke, so ist in der Mitte dieses Loches, das heißt, in der Mitte der Breite, ein Punkt, welcher nur unterstützt werden darf, um zu verhüten, daß die Stange weder falle noch sich umdrehe, sie mag übrigens gegen die Erdfläche senkrecht, gleichlaufend, oder schief gestellet seyn. Dieser Punkt trägt also gleichsam die ganze Schwere, oder das ganze Gewicht des Körpers, so daß jemand, der diesen Punkt mit dem Finger unterstützen würde, den ganzen Druck aller materiellen Theilchen der Stange empfinden würde. Dieser Punkt, der sich in jedem Körper befindet, wird der **Schwerpunkt** des Körpers genannt. Es soll in der Folge bewiesen werden, daß jeder Körper, vermöge der Natur der Dinge, einen solchen Schwerpunkt haben müsse. Unterdessen wollen wir das Dasein desselben als eine bloße Erfahrungs-Wahrheit annehmen.

§. 11.

Wir haben schon angemerket, daß die Schwere eines Körpers nicht eigentlich von seiner Größe, sondern von der

Menge Materie, die in ihm enthalten ist, abhänget. Man muß also zwei Dinge sorgfältig von einander unterscheiden, nämlich die **Größe**, oder das **Volumen** eines Körpers, und seine **Masse** oder die Quantität seiner Materie. Die **Größe** oder das **Volumen** wird durch geometrische Ausmessungen in Kubik-Maaß bestimmt. Z. E. man saget, die Größe eines Körpers betrage so und so viel Kubikzoll, Kubikfuß, Kubikruthen, Kubikmeilen u. s. f.

§. 12.

Die **Masse** kann nicht besser bestimmet werden, als durch das Gewicht, da das Gewicht lediglich von der Masse oder Quantität Materie abhänget. Man kann demnach die Masse jedesmal in Zentnern, Pfunden, Unzen, Lothen, u. s. w. bestimmen. Jedoch muß man sich hierbei erinnern, daß Masse und Gewicht nicht einerlei sind, sondern nur nach dem nämlichen Verhältnisse zunehmen. Wenn also eine Masse in Pfunden berechnet wird, so wird nicht an den Druck gedacht, welchen ein Pfund Materie ausübet, um sich der Erde zu nähern, sondern es wird darunter weiter nichts verstanden, als eine gewisse Menge Materie, nämlich so viel, als in einem Körper enthalten ist, welcher in der Nachbarschaft der Erde ein Pfund wieget. Obgleich also solche Materien, die sehr weit von der Erde entfernet sind, kein eigentliches Gewicht haben, so läßt sich doch ebenfalls ihre Masse in Pfunden berechnen. So könnte man z. E. die ganze Masse der Sonne in Pfunden bestimmen, da dann jedes Pfund nichts anders sein würde, als eine solche Menge Materie, welche hier auf der Erde ein Pfund wiegen würde.

§. 13.

Die **Dichtigkeit** eines Körpers oder einer Materie, ist nichts anders, als die Quantität der Materie, welche in der Einheit der Größe, zum Exempel in einem Kubikfuß, ent-

enthalten ist. Sie stimmet also mit der verglichenen Schwere überein, nur daß bey der Dichtigkeit bloß an die Anzahl der materiellen Theilchen gedacht wird, da hingegen bei der verglichenen Schwere der Druck in Betrachtung kömmt, welchen diese Theilchen niederwärts ausüben. Frägt man also z. E. nach der Dichtigkeit des Regenwassers, so antworte ich: diese Dichtigkeit beträgt 70 Pfund den Kubikfuß. Die Dichtigkeit des Goldes beträgt 1375 Pfund den Kubikfuß, u. s. f. Man merke, daß wir hier allemal das Pariser Gewicht zum Schweren-Maaße annehmen, weil es am genauesten bestimmt ist.

§. 14.

Man saget, ein Körper sey homogen oder von gleichförmiger Dichtigkeit, wenn in allen gleichen Theilen seiner Größe gleich viel Materie enthalten ist, so klein man auch die Theile annehmen mag. Hingegen ist der Körper heterogen oder von ungleichförmiger Dichtigkeit, wenn in gleichen Theilen seiner Größe hier mehr und dort weniger Materie enthalten ist.

§. 15.

Bei Körpern von gleichförmiger Dichtigkeit findet man die Masse, wenn man die Dichtigkeit mit der Größe multipliziret. Z. E. es sei gegeben ein bleierner Körper von 5 Kubikfuß. Da jeder Kubikfuß Blei 790 Pfund wieget, so enthält die ganze Masse 5mal 790, das ist 3950 Pfund. Ueberhaupt, es sey m die verlangte Masse eines Körpers, die Größe des Körpers betrage G Kubikfuß, und die Dichtigkeit sey d Pfund den Kubikfuß, so ist allemal $m = d\,G$

Hier wird die Masse m in eben solchem Gewichte gerechnet, wie die Dichtigkeit d. Man merke auch, daß d allemal das Gewicht eines ganzen Kubikfußes andeutet, obgleich

gleich G ein kleineres Volumen als ein Kubikfuß sein kann. Z. E. Gesezt es sei die Materie Queckſilber, so ist $d = 980$ Pfund, (nämlich für jeden Kubikfuß.) Nun sei die Grösse G des Körpers $= \frac{3}{1000}$ Kubikfuß, so ist

$$m = 980 \cdot \frac{3}{1000} = \frac{2940}{1000} = 2,94 \text{ Pfund.}$$

§. 16.

Aus $m = d\,G$ folget

$$d = \frac{m}{G}$$

das heißt, man findet die Dichtigkeit (oder die Schwere eines Kubikfußes) wenn man die Masse (oder die Schwere des ganzen Körpers) durch die Grösse (oder die Anzahl der Kubikfuße) theilet.

Z. Ex. Es sey der Körper von Silber

$m = 3080$ Pfund, $G = 4$ so ist

$$d = \frac{3080}{4} = 770 \text{ Pfund.}$$

Die Dichtigkeit des Silbers ist demnach 770 Pfund (den Kubikfuß). Es sey die Materie Platina oder weißes Gold. Es sey

$$m = 100\tfrac{625}{1000} \text{ (Pfund)}$$

$$G = \tfrac{1}{16} \text{ (Kubikfuß) so ist}$$

$$d = \frac{100\frac{625}{1000}}{\left(\frac{1}{16}\right)} = (100,625) \times 16 = 1610$$

Anmerkung. Hieraus siehet man beiläufig, wie die Dichtigkeit einer harten Materie bestimmt werden kann, wovon sich nicht auf eine bequeme Art ein Kubikfuß abschneiden läßt. Nämlich man wieget die ganze Masse. Man suchet die Größe in Kubikfuß, entweder unmittelbar durch geometrische Rechnungen, oder durch das Eintau-

Eintauchen des Körpers in ein reguläres Gefäß, welches mit Wasser oder Sand u. s. w. angefüllet ist, wie es die praktische Geometrie lehret. Dividirt man nun das Gewicht des Körpers durch seine Größe in Kubikfuß, so bekömmt man die Dichtigkeit oder das Gewicht eines Kubikfußes.

§. 17.

Aus $m = d\,G$ folget noch

$$G = \frac{m}{d}$$

3. Ex. Eine Masse Kupfer wieget 4305 Pfund, und man weiß, daß ein Kubikfuß Kupfer 615 Pfund wieget, wie groß ist die Masse? Es ist hier

$$G = \frac{4305}{615} = 7 \text{ Kubikfuß.}$$

Anmerkung. Diese Regel ist sehr bequem, um die Größe eines irregulären Körpers vermittelst des Gewichtes zu bestimmen, wenn man nur die Dichtigkeit der Materie weiß. Noch ein Exempel. Gesezt eine Bildsäule von weissem Italienischen Marmor wieget 1134 Pfund. Nun weiß man, daß ein Kubikfuß von solchem Marmor 189 Pfund schwer ist. Also ist

$$\text{Größe} = \frac{1134}{189} = 6 \text{ Kubikfuß.}$$

§. 18.

Bey allen vorhergehenden Regeln wurde vorausgesetzet, daß der Körper **homogen** oder durchaus von einerlei Dichtigkeit sei. Die nämlichen Formeln gelten aber ebenfalls bey **heterogenen** Körpern, wenn man nur unter die Dichtigkeit d die mittlere Dichtigkeit verstehet. Diese wird gefunden durch die Formel $d = \frac{m}{G}$, oder wenn man das Gewicht aller Kubikfuße zusammen nimmt, und durch die Anzahl derselben theilet. Denn es bestehe ein Körper aus 1 Kubikfuß Gold, 2 Kubikfuß Silber, und 3 Kubikfuß Kupfer.

1 Kubikfuß Gold wieget	: : :	1375 Pfund
2 K. F. Silber zu 770 Pf. machen		1540 Pfund
3 K. F. Kupfer zu 615 Pf. machen		1845 Pfund

Zusammen 6 ~~Pfund~~ Materie, wiegen 4760 Pfund.

folglich, ein ins andere gerechnet, ist

$$d = \frac{4760}{6} = 793\tfrac{1}{3} \text{ Pfund.}$$

Und sind die dreierlei Materien zusammen geschmolzen, so wird in der That jeder Kubikfuß ohngefähr $793\frac{1}{3}$ Pfund wiegen. Ich sage ohngefähr. Denn die Erfahrung lehret, daß das Zusammenschmelzen die mittlere Dichtigkeit um etwas weniges verändert.

§. 19.

Wenn man eine Gleichung zwischen einigen veränderlichen Größen hat, so lassen sich auf eine sehr bequeme Art verschiedene Verhältnisse daraus ziehen. Man merke demnach, daß ein Produkt so vielmal größer oder kleiner wird, als einer der Faktoren größer oder kleiner wird. Es sey $x = yz$, so nimmt das Produkt x so vielmal ab oder zu als y ab oder zunimmt, wenn z unverändert bleibet. Verändern sich zugleich y und z, so wird das Produkt so vielmal größer oder kleiner als y größer oder kleiner wird, und wiederum so vielmal als z größer oder kleiner wird. Würde demnach y dreimal und z fünfmal größer, so würde das Produkt yz oder x dreimal fünfmal, das ist 3×5mal

oder

oder 15 mal größer. Dieses, mit andern Worten ausgedrücket, heißt, die Werthe von x sind im zusammengesetzten Verhältnisse der Werthe von y und z. Ist z unveränderlich, so verhalten sich die Werthe von x nur noch wie die Werthe von y. Ist y unveränderlich, so verhalten sich die Werthe von x wie die Werthe von z.

Ferner, der Werth eines Bruches wird so viel mal größer oder kleiner, als der Zähler größer oder kleiner wird. Hingegen wird der Bruch so viel mal größer als der Nenner kleiner wird, oder so vielmal kleiner als der Nenner größer wird. Es sey z. Ex.

$$x = \frac{y}{z}$$

so nimmt x so vielmal zu oder ab, als y zu oder abnimmt. Hingegen nimmt x so vielmal zu, als z abnimmt, oder x nimmt so vielmal ab als z zunimmt. Das heißt, die Werthe des Bruches $\frac{y}{z}$ oder des x verhalten sich gerade wie die Werthe von y, und umgekehrt wie die Werthe von z. Bleibet z unverändert, so verhalten sich die Werthe des x nur gerade wie die Werthe von y. Ist y unverändert, so verhalten sich die Werthe des x umgekehrt wie die Werthe des z.

§. 20.

Diese so natürliche Bemerkung vorausgesetzet, können wir ohne die geringste Mühe die Verhältnisse zwischen den Größen, Massen und Dichtigkeiten verschiedener Körper herausbringen. Wir dürfen nur annehmen, daß ein Körper sich in den andern verwandelt, und daß sich folglich seine Größe, Masse und Dichtigkeit verändern.

Aus der Gleichung

$$m = d\, G$$

schließ-

schließen wir, daß die Massen verschiedener Körper in zusammengesezten Verhältnisse der Dichtigkeiten und Grössen stehen. Sind die Größen gleich, so so bleibet G unverändert, und folglich: bei Körpern von gleicher Größe verhalten sich die Massen wie die Dichtigkeiten. Sind die Dichtigkeiten gleich, so verhalten sich die Massen wie die Grössen, weil alsdann d beständig ist.

Aus der Gleichung

$$d = \frac{m}{G}$$

sehen wir: daß die Dichtigkeiten verschiedener Körper sich gerade wie die Massen und umgekehrt wie die Größen verhalten. Sind die Größen gleich, so verhalten sich die Dichtigkeiten wie die Massen. Sind die Massen gleich, so verhalten sich die Dichtigkeiten umgekehrt wie die Grössen.

Aus der Gleichung

$$G = \frac{m}{d}$$

folget: daß die Größen sich gerade wie die Massen, und umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten. Bei gleichen Dichtigkeiten verhalten sich die Grössen wie die Massen; und bei gleichen Massen verhalten sich die Größen, umgekehrt wie die Dichtigkeiten.

Bei allen diesen Verhältnissen wird vorausgesetzet, daß jeder Körper in sich selbst homogen sey, oder man muß unter der Dichtigkeit die mittlere Dichtigkeit verstehen (§ 18.) Die angeführten Verhältnisse kann man ebenfalls durch einiges Nachdenken über die Natur der Dinge herausbringen. Jedoch war es nicht überflüßig hier eine allgemeimeine Methode zu erklären, welche in vielen anderen Fällen gute Dienste leistet.

§. 21.

Da die Massen und Dichtigkeiten der Körper durch das Gewicht bestimmet werden, so ist es höchst nöthig, genaue und recht bestimmte Gewichte zu gebrauchen. Im Grunde stehet es jedem frey, sich ein Pfund oder eine andere Gewichts-Einheit zu wählen, um zu seinem Nutzen oder Vergnügen, die Schweren der Körper damit zu vergleichen (§ 8). Hingegen ist es für den Handel und andere geselligen Geschäfte höchst nöthig, daß, wenigstens in einer und derselben Stadt, oder in einem und demselben Lande, einerlei Gewicht gebrauchet werde, welches auch wirklich allenthalben eingeführet ist.

Da aber die Menschen nicht nur mit ihren Mitbürgern, sondern auch mit Fremden Verkehr haben, so ist es auch nüzlich, die Verhältnisse der verschiedenen gangbaren Gewichte zu kennen. Bey dieser Vergleichung könnte man sehr irren, wenn man nicht sorgfältig drei Arten der Gewichte unterschiede, welche meistens zugleich am nämlichen Orte gangbar sind. Es sind folgende:

1) Das Krämer-Gewicht, oder Handels-Gewicht, wornach die meisten etwas voluminösen Waaren abgewogen werden. In Frankreich nennet man es Poids de marc, und in Engeland Avoir-du-poids.

2) Das Apotheker-Gewicht, oder medizinische Gewicht.

3) Das Münz-Gewicht, wornach nicht nur Münzen, sondern auch Gold, Silber und Edelgesteine gewogen werden. In Frankreich und Engeland heißt es Troy-Gewicht, oder Troye-Gewicht, vielleicht deswegen, weil es in der Stadt Troye in Champagne am ersten gebrauchet worden seyn mag.

In

In Berlin setzet man noch das Schlächter-Gewicht hinzu. Dieses ist aber nur in der Eintheilung vom Krämer-Gewichte unterschieden. Der Zentner ist in beiden einerlei; nur daß die Krämer denselben in 110 Pfund, die Schlächter hingegen in 100 Pfund eintheilen, so daß 11 Pfund Krämer-Gewicht nur 10 Pfund Schlächter-Gewicht ausmachen.

§. 22.

Das Krämer-Gewicht oder Handels-Gewicht wird in Deutschland folgendermaßen eingetheilet. Wenn man das Pfund als bekannt annimmt, so machen

110 Pfund einen Zentner.
40 Pfund einen großen Stein.
20 Pfund einen kleinen Stein.

an andern Orten gehören 44 Pfund zum großen Stein, und 22 zum kleinen Stein. Ferner, unterhalb des Pfundes, machet

1 Pfund 32 Loth.
1 Loth 4 Quentchen.
1 Quentchen 4 Pfennig-Gewichte.
1 Pfennig-Gewicht 2 Heller-Gewichte.

Das Münz-Gewicht wird also eingetheilet:

1 Pfund hat 2 Mark.
1 Mark hat 8 Unzen.
1 Unze hat 12 Gran.
1 Gran hat 3 Grän.

oder auch für Goldarbeit,

1 Pfund hat 2 Mark.
1 Mark hat 24 Karat.
1 Karat hat 12 Grän.

Eine andere Eintheilung des Münzgewichtes bestehet darin, daß die ganze Mark in 65596 Richtpfennigstheile

ein-

eingetheilet wird. Auch rechnet man beim Goldgewichte nach Eßchen, wovon 4361 auf ein Berliner Pfund gehen.

Das Apotheker-Gewicht enthält folgende Abtheilungen.

1 Pfund (℔) hat 12 Unzen.
1 Unze (℥) hat 8 Drachmen.
1 Drachme (ʒ) hat 3 Skrupel.
1 Skrupel (℈) hat 20 Gran (gr.)

Man merke aber wohl, daß das Handels-Pfund, das Münz-Pfund und das Apotheker-Pfund nicht allemal einerlei Schwere haben.

§. 23.

In Frankreich wird das Handels-Gewicht also eingetheilet:

1 Zentner (quintal) hat 100 Pfund (livres)
1 Pfund (livre) hat 16 Unzen (onces)

Ferner pfleget man auch in halben Pfunden (demi-livres), Viertel-Pfunden (quarterons), Halbviertel-Pfunden (demi-quarterons), einzukaufen.

Das Gewicht für theure Waaren, und also auch das Münz-Gewicht, wird folgendermaaßen eingetheilet:

1 Pfund hat 2 Mark.
1 Mark hat 8 Unzen.
1 Unze hat 3 gros.
1 gros hat 3 deniers.
1 denier hat 24 grains.

Die Französischen Apotheker hatten ehedem ihr besonderes Medizinal-Gewicht, dessen Eintheilung mit dem vorigen deutschen Apotheker-Gewicht übereinstimmte. Jezt aber gebrauchen sie meistens die lezt angezeigte Eintheilung des französischen Handels-Gewichts.

§. 24.

§. 24.

In England wird das Handels-Gewicht, oder Avoir-du-poids-Gewicht also eingetheilet:

1 Tonne machet 20 Zentner.
1 Zentner machet 112 Pfund.
1 Pfund machet 16 Unzen.
1 Unze machet 8 Drachmen.
1 Drachme machet 3 Skrupel.

Das Münzgewicht, oder Troy-Gewicht, (womit jedoch auch Getreide und flüssige Sachen gewogen werden) wird also eingetheilet:

1 Pfund hat 12 Unzen.
1 Unze hat 20 deniers.
1 denier hat 24 grains.

Auch wird das Pfund Troy-Gewicht, welches ebenfalls zu Amsterdam gebrauchet wird, dort in 10240 Asen eingetheilet, welche etwas kleiner sind, als die Eßchen, die oben erwähnet worden, indem 10000 Amsterdammer Asen nur 8947 Berliner Eßchen ausmachen. Uebrigens, obgleich das Troy-Gewicht in England, Frankreich und Holland gebräuchlich ist, so ist doch das Troy-Pfund in diesen verschiedenen Ländern nicht gänzlich von einerlei Schwere.

Das Apotheker-Gewicht wird in Engeland eben so wie in Deutschland eingetheilet. Ueberhaupt scheinet die Eintheilung dieses Gewichtes in allen Europäischen Ländern ziemlich einförmig zu seyn.

Da die Deutschen, Französischen und Englischen Gewichte am bekantesten sind, so haben wir nicht unterlassen wollen, deren Eintheilung anzuführen. Es wäre zu weitläuftig, die Gewichte der übrigen Länder so genau zu betrachten.

§. 25.

Hier folget eine Vergleichung der bekanntesten Gewichte, so daß die Zahlen alle einerlei Schwere ausdrücken.

Hamburgisch Handels-Gewicht	806 ℔
Lissabon . . .	884 ℔
Madrid . .	841 ℔
Paris . . .	792 ℔ poids de marc.
Wien . . .	690 ℔
Berlin . .	827 ℔
Warschau . .	1026 kleine ℔
Petersburg . .	947 ℔
Riga . .	927 ℔
Reval . . .	900 ℔
Stockholm . .	911 ℔ Viktual. Gew.
Kopenhagen . .	776 ℔
Amsterdam . .	784 ℔ Handels-Gew. 787½ ℔ Troy-Gew.
London . .	844 ℔ Avoir du p. 2038 ℔ Troy-Gew.
Genf (Genève) . .	704 große ℔ 844 kleine ℔
Bern . . .	745 ℔
Rom	1098 ℔
Konstantinopel . . .	305½ Ok. 694 Lodra, Rott.
Batavia . . .	655 Katti.
China . . .	646 Katti.

Surinam . .	781 ℔
Deutsches Apotheker-Gewicht	1082 ℔
Englisches Apotheker-Gewicht	1038 ℔
Franz. Ap. Gew. von 16 Unzen	792 ℔
Franz. Ap. Gew. von 12 Unzen	1055 ℔
Holländ. Ap. Gew. .	1050 ℔
Schwed. Ap. Gew. . .	1087 ℔

Wer eine weitläuftigere Vergleichung der Gewichte verlanget, wird solche in verschiedenen Büchern antreffen, zum Beispiel in der Schulzischen Sammlung unentbehrlicher Tafeln, in Michelsens Arithmetik, u. s. w.

Um durch ein Exempel den Gebrauch einer solchen Tafel zu zeigen, so sei verlanget zu wissen, wie viel 100 Pfund Pariser poids de marc in Berliner Gewicht ausmachen. Man sage, vermöge der Regel-Detri: 792 Pariser Pfund geben 827 Berliner Pfund, was geben 100 Pariser Pfund? Es kommen 104 Pfund und $13\frac{2}{5}$ Loth ohngefähr, das Pfund zu 32 Loth gerechnet.

Schon seit langer Zeit hat man getrachtet, ein vollkommen bestimmtes Maaß der Schwere zu finden, wornach sich alle Völker richten könnten, um ihre gebräuchlichen Gewichte damit zu vergleichen. Bisher aber ist noch nichts ganz befriedigendes in dieser Sache entdecket worden.

Noch ist zu erinnern, daß in der vorigen Tabelle die Münzgewichte ausgelassen sind. Hier in Berlin, wie auch in vielen andern Orten Deutschlands bedienet man sich des Cöllnischen Münzgewichtes. Es machen aber 100 Mark Cöllnisch $99\frac{77}{100}$ Mark Berlinisch, woraus man

man siehet, daß der Unterschied nur geringe ist. In Frankreich, England, Holland, u. s. f. bedienet man sich bey den Münzwesen des Pfundes oder der Mark Troy-Gewicht.

§. 26.

Vermittelst genauer Gewichte lassen sich die verhältnißmäßigen Schweren der verschiedenen Materien erforschen. Hier folget eine Tabelle, worin die Verhältnisse der Schweren der bekantesten Materien angezeiget sind. Hierbei wird die Schweere des Regenwassers = 1 angenommen. Die Ziffern nach dem Komma bedeuten Tausendtheile.

Platina oder weißes Gold	23,000
Das reinste Gold	19,640
Dukatengold	18,261
Quecksilber	14,000
Blei	11,325
Das feinste Silber	11,091
Gemünztes Silber	10,535
Schwedisches Kupfer	8,784
Meßing	8,000
Gehärteter Stahl	7,850
Eisen aus Deutschland	7,807
Das feinste Zinn aus England	7,295
Magnetstein aus Ungarn	5,106
Demant	3,400
Weisser Marmor aus Italien	2,707
Feuerstein	2,641

Gemeiner Kieselstein : : :	2,500
Kochsalz : : :	2,120
Ziegelstein : : :	2,000
Schwefel : : :	2,000
Salpeter : : :	1,900
Alabaster : : :	1,872
Aloe-Holz : : :	1,777
Alaun : : :	1,715
Grünspan : : :	1,714
Honig : : :	1,450
Arabisch Gummi : : :	1,375
Opium : : :	1,363
Gemeines Scheidewasser : :	1,300
Steinkohlen : : :	1,240
Schwarzer Agath : :	1,238
Ebenholz : : :	1,177
Pech : : :	1,150
Tischler-Leim : : :	1,111
Weihrauch : : :	1,071
Mahogniholz : : :	1,063
Bernstein : : :	1,040
Menschenblut : : :	1,040
Vieressig : : :	1,034
Brasilienholz : : :	1,030
Buchsbaumholz : : :	1,030
Seewasser : : :	1,030

Men-

Menschen=Urin	1,030
Kuhmilch	1,030
Ziegenmilch	1,030
Weisser Franzwein	1,020
Bier	1,019
Weineßig	1,017
Mallagawein	1,015
Flußwasser	1,009
Regenwasser	1,000
Brunnenwasser	0,999
Rheinwein	0,999
Distillirtes Wasser	0,993
Pontakwein	0,993
Burgunderwein	0,992
Siedendes Wasser	0,963
Champagnerwein	0,962
Lein=Oel	0,932
Holz=Asche	0,930
Eichen=Holz	0,925
Moseler Wein	0,916
Oliven=Oel	0,913
Terpentin=Oel	0,870
Büchen=Holz	0,854
Apfelbaum=Holz	0,793
Weizen	0,757
Kirschbaum=Holz	0,715

Birnbaum = Holz	0,661
Gerste	0,658
Nußbaum = Holz	0,631
Zedern = Holz	0,600
Weizen = Mehl	0,495
Hafer	0,472
Roggen = Mehl	0,454
Tannen = Holz	0,430
Kork = Holz	0,240
Luft	0,001

Wenn man, vermöge dieser Tafel, wissen will, wie viel ein Kubikfuß von jeder Materie wieget, so muß man die dabei stehende Zahl mit dem Gewichte eines Kubikfußes Regenwasser multipliziren. Ein Pariser Kubikfuß Regenwasser wieget 70 Pariser Pfund.

Da nun 792 Pariser Pfund 827 Berliner Pfund machen, so werden 70 Pariser Pfund ohngefähr $73\frac{1}{10}$ Berliner Pfund betragen. Also wieget der Pariser Kubikfuß Regenwasser $73\frac{1}{10}$ Berliner Pfund. Nun verhält sich der Pariser Fuß zum Berliner Fuß wie 144 zu 137, und folglich der Pariser Kubikfuß zum Berliner Kubikfuß wie $(144)^3$ zu $(137)^3$, das ist, wie 2985984 zu 2571353. Ferner verhalten sich die Schweren von einerlei Materie, wie die Größen. Also wie 2985984 zu 2571353, so verhalten sich $73\frac{1}{10}$ zu $62\frac{9}{10}$ ohngefähr. Also muß ein Berliner Kubikfuß Regenwasser ohngefähr $62\frac{9}{10}$ Berliner Pfund wiegen. Und mit dieser Zahl müssen die in der Tafel enthaltenen Zahlen multipliziret werden, wenn man das Gewicht eines Berliner Kubikfußes von jeder Materie in Berliner Pfunden bekommen will. Z. E. Man wolle wissen, wie schwer ein Berliner Kubikfuß Blei in

Ber=

Berliner Pfunden sei; so findet man bei dem Blei die Zahl 11,325. Multipliziret man mit $62\frac{9}{10}$, so kömmt $712\frac{3425}{10000}$, woraus man siehet, daß ein Berliner Kubikfuß Blei ohngefähr $712\frac{1}{3}$ Berliner Pfund wieget.

§. 27.

Laßt uns noch etwas von der Vergleichung der Schwere verschiedener Körper beifügen.

Da das Regenwasser an allen Orten und in allen Zeiten so ziemlich einerlei Schwere hat, und ein Kubikfuß desselben allemal in einem Gefäße abgewogen werden kann, so pfleget man die Schwere der übrigen Materien damit zu vergleichen. Einige gebrauchen auch distillirtes Wasser, welches von allen Erdtheilen befreiet ist.

§. 28.

Der erste Weg, der einem beifällt, um die Schweren verschiedener Materien zu vergleichen, bestehet darin, daß man von jeder einen Kubikfuß abwäge, z. Ex. einen Kubikfuß Wasser, Holz, Silber, u. s. f. da sich dann zeigen wird, wie vielmal eine Materie schwerer ist als die andere. (§ 9). Indessen ist dieser Weg nicht der bequemste, und der folgende ist vorzuziehen.

Nehmet eine recht genaue Wage. Die gemeine mit gleichen Armen ist hierzu die beste. Leget die Materien oder die Körper, deren Schweren ihr vergleichen wollet, in die Wageschalen, und nehmet nach und nach von der einen, welche sinket, so viel ab, bis ihr das vollkommene Gleichgewicht erhalten habet.

Nun messet die geometrische Größe oder den körperlichen Inhalt beider Körper, welche einander das Gleichgewicht halten, so verhalten sich ihre Schweren umgekehrt, wie

wie ihre Größen. Denn da sie gleich schwer, aber ungleich groß sind, so ist der kleinere so vielmal dichter als er kleiner ist, oder so vielmal dichter als der andere größer ist; oder so vielmal der größere Körper den kleineren an körperlichem Inhalte übertrifft, so vielmal übertrifft der kleinere den größeren an Dichtigkeit.

Wenn man also von beiden Materien gleich viel nähme, z. E. einen Kubikfuß, so würden sich die Schweren verhalten wie die Dichtigkeiten, folglich ist der kleinere Körper auf der Schale von so vielmal schwererer Natur, als er kleiner ist, oder als der andere größer ist.

Gesezt also, der eine Körper betrage 5 Kubikzoll und der andere 3 Kubikzoll, so ist jener $1\frac{2}{3}$mal größer, folglich dieser von $1\frac{2}{3}$ dichterer oder schwererer Natur, oder die Schwere jener Materie verhält sich zur Schwere dieser, wie 3 zu 5.

Hierbei könnte noch gefraget werden, wie man die Größe der abgewogenen Körper am besten finden kann. Sind die Materien flüssig oder körnig, wie Wasser oder Sand, so schüttet man sie sogleich in zilindrische oder prismatische Gefäße von gleichen Grundflächen und gleicher Schwere, da sich dann die Größen verhalten wie die Höhen, bis wo die Materien steigen.

Sind aber die Materien fest, wie Stein, Holz, Blei, u. s. f. so lege man sie nach geschehener Abwägung in eben dergleichen Gefäße, und schütte Wasser oder Sand, u. s. w. darauf, bis die Gefäße voll sind. Nun ziehe man die festen Körper heraus, und vergleiche die Höhen der ledig bleibenden Theile; dann verhalten sich die Körper wie die Räume, die sie leer gelassen haben, und diese, wie die Höhen, da die Grundflächen gleich sind.

Wenn

Wenn der eine abzuwägende Körper fest und der andere flüssig ist, so muß gleich anfänglich auf der Schale, wo der feste Körper sich befindet, so viel Gewicht geleget werden, als das Gefäß beträgt, welches die Flüssigkeit enthält.

§. 29.

Obgleich die Schwere der Luft sehr wenig beträgt, so läßt sie sich doch auch bestimmen. Man nehme eine kupferne hohle Kugel, woran ein Hahn, wie an Wein- oder Biertonnen, angebracht ist. Diese Kugel wäge man aufs allergenaueste ab. Nun leere man die Luft aus derselben aus. Dieses geschiehet wenn man die Kugel sehr stark erhitzet, da dann die Hitze die Luft aus dem geöfneten Hahne heraus treibet. So lange die Kugel noch in voller Hitze ist, wird der Hahn verschlossen. Nun läßt man sie erkalten, und wäget sie, da sie beinahe luftleer ist. So wird sie etwas weniger wiegen, als vorher. Dieser geringe Unterschied ist die Schwere der Luft, die vorher in der Kugel war.

Ferner berechnet man auf geometrische Art den Inhalt der inwendigen Kugel, und findet, daß so und so viel Kubikzoll Luft so und so viel wiegen. Daraus kann man schließen, wie viel ein Kubikfuß wiegen würde, und folglich die Schwere der Luft mit der Schwere anderer Materien vergleichen.

Da aber die Luft bei warmer Witterung dünner und bei kalter dichter wird, so muß man den Versuch mehrmal wiederholen, und das Mittel nehmen. Nämlich man addiret alle gefundene Schweren zusammen, und dividiret durch die Anzahl der Versuche.

Wer eine Luftpumpe hat, kann sie noch bequemer und gewisser als das Feuer zur Ausleerung der Kugel gebrauchen. Hiervon aber können wir an diesem Orte nicht handeln.

§. 30.

Wenn man weiß, wie viel ein Kubikfuß von einer Materie wieget, so läßt sich leicht finden, wie viel ein Körper wiegen muß, der so und so viel Kubikfuß groß ist. Siehe § 15.

Und umgekehrt, wenn man weiß, wie viel Pfund ein Körper wieget, und wie viel jeder Kubikfuß seiner Materie wieget, so lässet sich seine Größe finden. Z. E. Ein Stein wieget 50 Zentner, oder 5500 Pfund. Weiß ich nun, daß jeder Kubikfuß davon 280 Pfund wieget, so ist die Größe des Steines

$$\frac{5500}{280} = \frac{550}{28} = \frac{275}{14} = 19\tfrac{9}{14} \text{ Kubikfuß.}$$

§. 31.

Auch läßt sich vermittelst des bekannten Gewichtes eines Kubikfußes von zweierlei Materien, die Vermischung derselben in einem Körper finden. Z. E. Ein Körper der aus Blei und Zinn zusammen geschmolzen ist, wieget $2917\frac{3}{5}$ Pfund, und seine Größe beträgt 5 Kubikfuß. Wie viel ist darinnen Blei und Zinn? Man nimmt als bekannt an, daß ein Pariser Kubikfuß Blei $795\frac{1}{6}$ Pariser Pfund, ein Kubikfuß Zinn hingegen $442\frac{2}{5}$ Pfund wieget.

Es seien im Körper enthalten x Kubikfuß Blei, so beträgt das Zinn $(5 - x)$ Kubikfuß.

x Kub. F. Blei zu $795\frac{1}{6}$ Pf. machen $795\frac{1}{6} \cdot x$

$(5 - x)$ K. F. Zinn zu $442\frac{2}{5}$. Pf. machen $442\frac{2}{5} \cdot 5 - 442\frac{2}{5} \cdot x$

Zusammen $442\frac{2}{5} \cdot 5 + (795\frac{1}{5} - 442\frac{2}{5})x$

Also

Also muß sein

$$442\tfrac{2}{5}.\ 5+(795\tfrac{1}{5}-442\tfrac{2}{5})x=2917\tfrac{3}{5}$$

$$(795\tfrac{1}{5}-442\tfrac{2}{5})x=2917\tfrac{3}{5}-442\tfrac{2}{5}.5$$

$$x=\frac{2917\tfrac{3}{5}-442\tfrac{2}{5}.5}{795\tfrac{1}{5}-442\tfrac{2}{5}}$$

$$x=\frac{14588-2212.\ 5}{3976-2212}$$

$$x=\frac{14588-11060}{3976-2212}$$

$$x=\frac{3528}{1764}=2$$

Also sind im gegebenen Körper 2 Kubikfuß Blei, folglich 5 — 2, oder 3 Kubikfuß Zinn. Hier ist die Probe.

2 Kubikfuß Blei, zu $795\frac{1}{5}$ Pf. machen $1590\frac{2}{5}$ Pf. Blei.
3 Kubikfuß Zinn, zu $442\frac{2}{5}$ Pf. machen $1327\frac{1}{5}$ Pf. Zinn.

Zusammen $2917\frac{3}{5}$ Pf. Metall.

Will man eine allgemeine Regel haben, so trage man die Aufgabe folgender Weise vor. Ein Körper von k Kubikfuß wieget p Pfund. Er bestehet aus zweierlei Materien: von der schwereren wieget ein Kubikfuß s Pfund, und von der leichteren wieget ein Kubikfuß l Pfund, wie viel enthält der Körper von jeder Art Materie? Von der schwereren enthalte er x Kubikfuß, so enthält er von der leichtern $(k-x)$ Kubikfuß.

x Kubikfuß zu s Pfund, machen sx Pf.
$(k-x)$ Kubikfuß zu l Pfund, machen $lk-lx$ Pf.

Zusammen $lk+(s-l)x$ Pf.

Also

$$\text{Also } lk + (s-l)\,x = p$$
$$(s-l)\,x = p - lk$$
$$x = \frac{p-lk}{s-l}$$

Daraus ergiebt sich diese Regel. Vom ganzen Gewichte (p) des Körpers ziehe man ab das Gewicht, welches er haben würde, wenn er ganz aus der leichteren Materie bestünde (lk). Das übrige theile man durch den Unterschied der Schweren eines Kubikfußes von jeder Materie ($s-l$).

Diese Regel stimmt auch mit der gesunden Vernunft überein. Dann wenn ich vom ganzen Gewichte des Körpers dasjenige abziehe, was er wiegen würde, wenn er ganz aus der leichteren Materie bestünde, so zeiget der Rest den Ueberschuß der Schwere an, der aus der schwereren Materie entstehet. Theile ich nun diesen Rest durch den Ueberschuß der Schwere jedes Kubikfußes, nämlich durch den Unterschied der Schweren, so erfahre ich, wie viel mal dieser Ueberschuß eines Kubikfußes im ganzen Ueberschusse enthalten ist, und folglich wie viel Kubikfuß von der schwereren Materie vorhanden sein müssen.

Will man nun auch die Anzahl Kubikfuße der leichteren Materie algebraisch bestimmen, so ist sie

$$k - x = k - \frac{p-lk}{s-l}$$
$$= k + \frac{lk-p}{s-l}$$
$$= \frac{ks - lk + lk - p}{s-l}$$
$$= \frac{ks-p}{s-l}$$

Das

Das heißt: vom Gewichte (ks) welches der Körper haben würde, wenn er ganz aus der schwereren Materie bestünde, wird das Gewicht was er wirklich hat (p) abgezogen, und der Rest wird wie vorher durch den Unterschied der Schweren getheilet. Dieses läßt sich wie vorher erklären, wenn man nur den Mangel anstatt des Ueberschusses nimmt.

Die Regel ist folglich im allgemeinen diese: **Wenn ein Körper aus zweierlei Materien bestehet, und man will wissen, wie viel von der einen darinn ist, so berechnet man erstlich, was er wiegen würde, wenn er bloß aus der andern Materie bestünde. Man nimmt den positiven Unterschied dieses und des wirklichen Gewichts. Dieser Unterschied wird durch den Unterschied der relativen Schweren dividirt.**

Doch muß man wie oben (§. 18.) merken, daß beim Zusammenschmelzen der Metalle, dieselben gemeiniglich eine etwas andere Dichtigkeit erhalten, als vermöge der Rechnung geschehen sollte, so daß die Rechnung das verlangte Verhältniß nicht vollkommen genau angiebt. Dieses ist überhaupt ein Umstand, der sich allemal ereignet, wenn die abstrakten Regeln auf Gegenstände der Natur oder Kunst angewandt werden sollen. Denn es finden sich dabei viele Nebendinge, welche die berechneten Quantitäten entweder vergrössern oder verkleinern, und welche nicht bestimmt genug sind, um sie in Anschlag zu bringen, und in die Rechnung mit einzuführen.

§. 32.

Bei Bestimmung der Masse eines Körpers und seiner Schwere kömmt es oft auf eine genaue Ausmessung seiner Größe an, wie man es aus den vorhergehenden Paragraphen bemer-

bemerken kann. Daher siehet man, wie nöthig es ist, ein genaues Längenmaaß zu besitzen. Es gehet aber mit dem Längenmaaße, in Betrachtung der genauen Bestimmung desselben, wie mit dem Gewichte, da sowohl Maaß als Gewicht an verschiedenen Orten auch verschiedene Größe haben. Hier folgen die vornehmsten Fuß-Maaße nach ihrem Verhältnisse, so daß die Zahlen, Linien des Königl. Pariser Fußes (pied de Roi) ausdrücken, oder solche Längen, deren 144 einen Pariser Fuß ausmachen. Die nach dem Komma stehenden Ziffern bedeuten Zehntheilchen und Hundertheilchen.

Amsterdam	125,5
Basel	132,2
Berlin	137,3
Bern	130,0
Breslau	126,0
China (Handelsmaaß)	150,0
(mathematischer Fuß)	147,7
Konstantinopel	314,0
Kopenhagen	139,13
Krakau	158,0
Dänemark	139,13
Danzig	127,2
Dresden	125,5
England (richtiger Fuß)	135,16
England (gemeiner Fuß)	135,0
Frankreich (Königlicher Fuß)	144,0
Genf	216,3

Ham-

Hamburg : : :	127,0
Alter Hebräischer Fuß : :	159,0
Königsberg in Preußen :	136,4
Leipzig (gemeiner Fuß) : :	125,1
(Bau-Fuß) : : :	125,3
Lissabon : : :	150,1
Lübek : : : :	129,0
Nürnberg : : : :	134,7
Rheinländischer Fuß : :	139,13
Riga : : : :	121,5
Rom : : : :	130,6
Schweden : : : :	131,6
Spanien : : :	125,3
Turin : : : :	143,2
Venedig : : :	154,0
Wien : : : :	142,0

Nach dieser Tafel ist es leicht, eine gewisse Anzahl Fuße, die nach dem Maaßstabe irgend eines Ortes gemessen worden, in ein andres Maaß zu verwandeln. Denn die beigefügten Zahlen drücken zugleich die Verhältnisse der verschiedenen Fuße aus; und wenn man solche Verhältniß-Zahlen umkehrt, so geben sie einerlei Größe in verschiedenen Maaß-Sorten. Gesezt, man wolle wissen, wie viel 100 Berliner Fuß in London machen würden, so zeiget die Tabelle an, daß der Londner Fuß 135,16 Pariser Linien enthält, der Berliner aber 137,3. Folglich verhält sich der Londner Fuß zum Berliner Fuß wie 135,16, zu 137,3, oder wie 13516 zu 13730. Das heißt umgekehrt, 13516 Berliner Fuß machen 13730 Londner Fuß.
Man

Man sage also, vermöge der Regel-Detri: 13516 Berliner Fuß geben 13730 londner Fuß, was geben 100 Berliner Fuß? Die Antwort ist 101,584 londner Fuß.

Man merke bei dieser Tafel, daß, obgleich so verschiedene Fuß-Maaße statt finden, dennoch nur einige wenige allgemein gebrauchet werden, hauptsächlich in mathematischen Büchern. Z. E. in Berlin ist der in der Tabelle angegebene Berliner Fuß (vermuthlich die halbe Elle) fast gänzlich unbekannt, und man braucht an dessen Stelle durchgängig den Rheinländischen Fuß. In Rußland wird beständig der Englische Fuß gebrauchet, obgleich verschiedene Tabellen einen besondern Russischen Fuß angeben. Ueberhaupt pfleget man vorzüglich nur dreierlei Fuß-Maaß zu gebrauchen, nämlich den Englischen Fuß, den Rheinländischen, und den Französischen Königlichen Fuß; von welchen dreien der erste am kürzesten und der letzte am längsten ist.

§. 33.

Aus dem Fuß-Maaße entstehen verschiedene andere, welche entweder Abtheilungen desselben, oder Zusammensetzungen sind. Der Fuß wird gemeiniglich in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, und die Linie in 12 Punkte eingetheilt. Oder man theilet erwähntermaßen den Fuß in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien, die Linie aber in 10 gleiche Theilchen, wie auch bei der vorhergehenden Tabelle geschehen ist, wo alle Zahlen Pariser Linien, und Zehntheilchen, auch wohl Hunderttheilchen von Pariser Linien ausdrücken.

Wenn auszumessende Linien etwas groß sind, so bedienet man sich auch eines größern Maaßes. Die Elle ist ein Maaß, welches eben sowohl als der Fuß von einem Orte zum andern verschieden ist, an den meisten Orten aber zwei Fuß des nämlichen Ortes ausmachet. Ein gemeiner Schritt

Schritt wird zu $2\frac{1}{2}$ Fuß oder $1\frac{1}{4}$ Elle gerechnet. Ein geometrischer Schritt zu 5 Fuß oder $2\frac{1}{2}$ Elle. Ein Klafter machet 6 Fuß oder 3 Ellen. Ein Bergklafter hält 7 Fuß oder $3\frac{1}{2}$ Elle. Die Pariser Ruthe (toise) hält 6 Königliche Fuß. In Deutschland pfleget man Ruthen anzunehmen, welche 12 Rheinländische Fuß, auch wohl 16 solche Fuß enthalten. Eine solche Ruthe theilen die Landmesser, zu mehrerer Bequemlichkeit der Rechnungen, in 10 Theile, jeden Theil wiederum in 10, u. s. f. Ueberhaupt sind solche Abtheilungen und Zusammensetzungen des Fußmaaßes sehr verschieden, und es ist höchst nöthig, sie in Schriften allemal genau anzuzeigen, wenn man davon Gebrauch machen will.

Bei sehr großen Längen bedient man sich eines noch größeren Maaßes, nämlich des Meilen-Maaßes, welches ebenfals an verschiedenen Orten von ungleicher Größe ist. Die deutsche Meile pfleget man auf 20000 rheinländische Fuß zu rechnen, und 15 solche Meilen machen einen Grad des Aequators, oder den 360ten Theil vom Umfange der Erdkugel. Hiernach lassen sich die Meilen anderer Länder mit der deutschen Meile vergleichen. Z. E. Es gehen auf einen Grad des Aequators 20 gewöhnliche französische Meilen (lieues), 90 russische Werste, 12 Ungarische Meilen, 60 Türkische und Italiänische, ebenfalls 60 Seemeilen auf dem Weltmeere, 75 Seemeilen auf dem mittelländischen Meere, 15 spanische Meilen, ebenfalls 15 Holländische Seemeilen, 12 schwedische Meilen, 20 polnische Meilen u. s. f. Auf Landkarten pfleget man allemal anzuzeigen, wie viel der gebrauchten Meilen auf einen Grad des Aequators gehen.

Zweites Hauptstück.

Von der Bewegung, und damit verknüpften Begriffen.

§. 1.

Der Ort eines Körpers ist der Raum, welchen er in einem bestimmten Zeitpunkte seines Daseins anfüllet.

§. 2.

Bewegung ist Veränderung des Orts, und Ruhe ist das Verbleiben eines Körpers am nämlichen Orte. Wenn diese Ruhe erzwungen ist, so daß der Körper nur deswegen an seinem Orte bleibet, weil zwei oder mehrere Ursachen ihn antreiben, sich nach entgegengesezten Gegenden hinzubewegen, so wird ein solcher Zustand der erzwungenen Ruhe ein Gleichgewicht genannt.

Die Lehre von Bewegung und Ruhe überhaupt heißt die Mechanik. Derjenige Theil derselben insbesondere, welcher vom Gleichgewichte handelt, wird die Statik genannt. Die Statik ist eigentlich der Gegenstand, womit wir uns in diesem Werke beschäftigen. Was wir von der Lehre der Bewegung anführen, dienet nur um die Lehren des Gleichgewichtes verständlicher zu machen.

§. 3.

Wo eine Bewegung statt findet, kömmt allemal viererlei in Betrachtung:

1) Eine

1) Eine **Macht**, welche die Bewegung verursachet, das heißt, welche Schuld daran ist, daß der Körper seinen vorigen Ort verläßt.

2) Der Körper selbst, welcher entweder beweget wird, oder wenigstens zur Bewegung angereizet wird. Im Lateinischen pfleget man ihn das **Mobile** oder das **Bewegbare** zu nennen.

3) Der **Weg** oder die **Bahn** welche der bewegte Körper durchläuft. Man nennet diesen Weg auch den durchlaufenen **Raum**.

4) Die **Zeit**, während welcher die Bewegung dauret.

Diese vier Dinge wollen wir jezt etwas umständlicher betrachten.

§. 4.

Was die Macht oder die bewegende Ursach betrift, so ist es nicht allemal nöthig, deren Natur oder Beschaffenheit genau zu kennen. Genug, daß das Dasein derselben durch ihre Wirkung, das heißt, durch die entstandene Bewegung erkannt wird. Ein Körper kann durch sehr verschiedene Mächte beweget werden, zum Beispiel, durch Wasser, Wind, Feuer, Gewichte u. s. f. Sogar Geister haben die Fähigkeit Körper zu bewegen, wie man es an Menschen und Thieren siehet, deren Körper von einer Seele beweget werden.

§. 5.

Die bewegende Macht wirket nicht allemal mit gleicher Heftigkeit oder mit gleicher Anstrengung. Der jedesmalige Grad dieser Heftigkeit oder Anstrengung wird die **Kraft** genannt, womit die Macht wirket. Jedoch pfleget man sehr oft unter der Kraft die wirkende Macht selbst zu verstehen. Die Umstände, und die Verbindung der Rede müssen den Sinn jedesmal genau bestimmen.

§. 6.

Der höchste Grad der Anstrengung deren eine Macht fähig ist, wird die Stärke derselben genannt.

Wenn man deutlich reden will, so verwechsle man die Macht selbst weder mit ihrer Stärke, noch mit der Kraft, welche sie in einem besonderen Falle anwendet.

§. 7.

Alles was die Wirkung einer Macht, und eine gewisse Kraft derselben erfordert, um beweget zu werden, wird ein Widerstand genannt.

Der Widerstand vernichtet oder verzehret also gleichsam die angewandte Kraft, oder einen Theil der Stärke, deren die Macht fähig ist.

Jeder bewegte Körper ist demnach ein Widerstand gegen die Kraft die ihn beweget. Jedoch pfleget man das Wort Widerstand meistens von solchen Dingen zu gebrauchen, auf welche die Kraft nicht unmittelbar, sondern vermittelst des bewegten Körpers wirket, das heißt solche, die der bewegte Körper auf seinem Wege antrift, und die ihn in seinem Laufe hindern.

§. 8.

Die Weise wie die Macht wirket, wird durch verschiedene Wörter ausgedrücket: man saget, sie treibet, stößt, ziehet, trägt den Körper u. s. f. Bei einer genaueren Betrachtung aber findet man, daß alle diese Ausdrücke weiter nichts bedeuten, als daß die Macht den Körper, oder irgend

irgend einen Theil desselben, oder einen Theil des Strickes, woran der Körper gebunden ist, vor sich forttreibet. Auch läßt sich nicht begreifen, daß eine körperliche Macht auf eine andere Weise wirken könne. Nämlich die Macht begegnet dem Bewegbaren; und da dieses ebenfalls körperlich ist, so können beide nicht denselben Ort einnehmen: das Bewegbare muß also weichen, wenn die Macht eine hinlängliche Kraft anwendet. Was die geistigen Mächte anbetrift, so ist ihre Wirkungsart uns völlig unbekannt.

§. 9.

Ferner ist bei der Wirkung der Macht ein Unterschied in Betrachtung der Dauer zu beobachten. Einige Mächte setzen ihre Wirkung eine geraume Zeit lang fort, andere hingegen wirken nur während einer unmerklichen Zeit. Im ersten Falle entstehet ein eigentliches Treiben, wie bei dem Winde, welcher ein Schiff treibet. Im anderen Falle entstehet ein Stoß, welcher von unmerklicher Dauer ist, und nach welchem der Körper sich selbst überlassen wird; da er dann, vermittelst der erhaltenen Bewegung, seinen Weg weiter fortsetzet. Zwischen beiden Wirkungs-Arten giebt es noch eine dritte, welche wir einen Antrieb nennen könnten, und die darin bestehet, daß die Macht zwar nur eine kurze, doch aber merkliche Zeit auf das Bewegbare wirket, und dann dasselbe sich selbst überläßt. Ein Beispiel davon haben wir an dem entzündeten Pulver, welches die Kanonen-Kugel so lange antreibet, bis diese aus der Mündung des Geschützes heraus ist.

§. 10.

Einige Mechaniker pflegen noch die Kräfte in lebendige und todte einzutheilen. Eine lebendige Kraft ist diejenige, welche wirklich eine Bewegung hervorbringt; eine todte hingegen ist eine solche, welche, der unüberwindlichen Hindernisse wegen, keine Bewegung verursachen kann, und sich in einen bloßen Druck, oder in einen fruchtlosen Stoß verwandelt. Z. B. Die Fallkraft, welche die Körper gegen die Erde treibet, ist lebendig, und verursachet den Fall der Körper, wenn diese frei gelassen werden. Hingegen ist es eine todte Kraft, wenn der Körper gestützet und zurückgehalten wird, oder wenn er die Erde erreichet hat.

§. 11.

Wenn eine Macht, die auf einen Körper wirket, nicht allemal diejenige Bewegung hervorbringet, welche man erwartet, so rühret dieses von verschiedenen Hindernissen her, die sich der Bewegung widersetzen. Unter diese Hindernisse gehöret vorzüglich der Zustand desjenigen Raumes, worin sich der Körper und dessen Bahn befindet. Diesen umgebenden Raum pfleget man das **Medium**, oder den **Mittelraum** zu nennen. Der Mittelraum ist entweder **leer**, oder **voll**, das heißt, er enthält entweder bloß das Bewegbare, wovon die Rede ist, oder noch irgend eine andere Materie (I.H. §2). In den Anfangsgründen der Mechanik und Statik pfleget man den Mittelraum als ganz leer zu betrachten. In der Folge aber muß untersuchet werden, in wiefern der volle Raum die Bewegung vermindern kann. Denn im vollen Raume hat die Kraft nicht nur das Bewegbare zu treiben, sondern auch die Theilchen der Materie, die den Mittelraum anfüllen. Die gemeinsten Bewegungen geschehen in der Luft, und folglich in einem angefüllten Raume. Es muß aber ein Anfänger sich vorstellen, daß die Luft gar nicht da sei, oder wenigstens keinen Wiederstand äußere. Diese Lehrart in der Mechanik stimmt mit derjenigen überein, welche in der Geometrie gebräuchlich ist, wo man dasjenige in Gedanken absondert, was in der Natur unzertrennlich ist, indem man zum Beispiele Linien ohne Breite noch Tiefe, und

Flä-

Flächen ohne Dicke annimmt. Der menschliche Verstand ist zu eingeschränkt, um alles mit einmal zu fassen, was zur Bestimmung einer Größe gehöret.

§. 12.

Ein anderes Hinderniß der Bewegung, welches sehr häufig vorkömmt, entstehet aus der Reibung der Körper gegen einander. Es ist nämlich kein Körper vollkommen glatt, sondern die Oberfläche bestehet allemal aus merklichen oder unmerklichen Erhöhungen und Vertiefungen. Wenn also ein Körper längs der Oberfläche eines andern fortgehen soll, so dringen die Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern, wodurch die Bewegung allemal merklich verhindert wird. Die Reibung ist weiter nichts, als diese Art der Verhinderung in der Bewegung. Auch die Reibung muß anfänglich aus der Acht gelassen werden, und man muß die Körper so betrachten, als wenn ihre Oberflächen vollkommen glatt, ohne alle Erhöhung oder Vertiefung wären.

§. 13.

Nachdem wir nun die bewegende Mächte, sammt ihren Widerständen und Hindernissen betrachtet haben, so kommen wir auf die bewegbaren Körper selbst. Schon bei Gelegenheit der Schwere haben wir sorgfältig die Größe, Dichtigkeit und Masse jedes Körpers zu bestimmen gelehret. Wir brauchen uns also nicht länger dabei aufzuhalten, und schreiten zu andern Eigenschaften, wodurch sich die Körper von einander unterscheiden.

§. 14.

Die materiellen Theilchen, woraus ein Körper bestehet, haben meistens einen Zusammenhang oder eine Verbindung, deren Ursachen und Mittel für uns Menschen unerklärbar sind. Wenn diese Verbindung so stark ist, daß eine große Kraft erfordert wird, um die Theile eines Körpers zu trennen, so wird derselbe ein fester oder **harter Körper** genannt. Hingegen, wenn die Verbindung so schwach ist, daß die allergeringste Kraft die Theilchen des Körpers trennen oder verrücken kann, so ist es ein **flüssiger Körper** oder eine **flüssige Materie**. Zu den festen Körpern gehören zum Beispiel Steine, Metalle, Holz, u. s. f. Zu den flüssigen rechnet man Wasser, Luft, Feuer, u. s. f.

§. 15.

Zwischen den festen und flüssigen Körpern befindet sich die Mittelart der **weichen Körper**, deren Theile sich durch eine merkliche aber doch nicht sehr große Kraft trennen lassen. Ueberhaupt haben alle bekannte Körper einen größern oder kleinern Grad der Weichheit. Ein vollkommen harter Körper müßte sich durch keine endliche Kraft zertheilen lassen, und ein vollkommen weicher müßte so beschaffen sein, daß sich dessen Theile auch durch eine unendliche kleine Kraft von einander entfernen ließen. Er wäre also zugleich vollkommen flüssig. Die Erfahrung lehret aber, daß kein in der Welt befindlicher Körper einen vollkommenen Grad der Festigkeit oder der Flüssigkeit besitzet.

§. 16.

Viele Körper oder Materien besitzen die Eigenschaft, daß, wenn sie zusammengedrückt oder gebogen worden, sie von selbst ihre vorige Größe oder Gestalt wiederum annehmen. Man bemerket diese Eigenschaft sowohl an festen als auch an flüssigen Materien, und nennet sie die **Elastizität** oder **Federkraft**. Unter den festen Körpern sind Vogelfedern, stählerne Klingen und Uhrfedern, elfenbeinerne Körper, gewisse Harze, Schwamm, u. s. w. am merk-

merklichsten elastisch. Unter den flüssigen Materien ist die Luft vorzüglich elastisch; denn eine Blase, welche mit Luft angefüllet ist, läßt sich sehr zusammendrücken, und dehnet sich von selbst wieder aus.

§. 17.

Ein vollkommen elastischer Körper wäre ein solcher, der eine eben so große Kraft anwendete, um sich in seine vorige Gestalt oder Größe wieder herzustellen, als angewandt worden, um ihn einzudrücken oder zu biegen. Es ist sehr zweifelhaft, ob dergleichen Körper in der Welt vorhanden sind: eben so wenig kann man mit Gewißheit behaupten, daß es vollkommen unelastische Körper gebe, die gar keine Kraft äußern, um sich nach der Eindrückung wieder herzustellen. Vermuthlich befindet sich die Elastizität in allen Körpern, und ist nur bei einigen stärker, bei anderen schwächer, oder gar unmerklich. Uebrigens ist die wahre Ursach der Elastizität unbekannt.

§. 18.

In mathematischen Rechnungen pfleget man oft anzunehmen, daß die Körper entweder vollkommen elastisch oder vollkommen unelastisch sind, obgleich keines von beiden in der Natur statt finden mag. So viel ist gewiß, daß bei der Voraussetzung, daß ein Körper vollkommen hart sei, derselbe auch zugleich vollkommen unelastisch sein müsse. Denn, ist er vollkommen hart oder fest, so läßt er sich weder eindrücken noch biegen, und es ist folglich an keine Wiederherstellung zu gedenken.

§. 19.

Flüssige Materien, hauptsächlich wenn sie elastisch sind, können mit einer erstaunenswürdigen Kraft wirken. Auch bedienet sich derselben die Natur in ihren vorzüglichsten Verrichtungen. Die Luft, wenn sie in Bewegung geräth, hat eine fast unwiderstehliche Gewalt. Das Feuer, welches flüssig und elastisch ist, dringet allenthalben durch, und zerstöret alles. Diejenigen Erscheinungen, deren Ursachen uns unbekannt sind, rühren vermuthlich meistens von elastischen oder unelastischen Flüssigkeiten her. Die anziehende Kraft des Magnets kann nicht besser erklärt werden, als wenn man ein flüssiges Wesen annimmt, welches durch die Poren des Magnets durchströmet. Die Bewegungen des menschlichen Körpers werden den flüssigen und elastischen jedoch unsichtbaren Lebensgeistern zugeschrieben. Auch die Erscheinung der Schwere und der Fallkraft läßt sich am besten begreifen, wenn man sich eine sehr feine, flüssige Materie gedenket, welche der Erde beständig zuströmet, und die Körper, welche ihr im Wege sind, mit sich fort treibet. Man muß aber annehmen, daß dieses Flüssige fein genug ist, um durch die kleinsten Poren durchzudringen, und auf die kleinsten Theile der Körper zu wirken. Denn, wäre dieses nicht, so müßte dieses Flüssige nur auf die Oberflächen der Körper wirken, und dann würden sich die Schweren der Körper nicht wie die Massen verhalten, sondern bloß wie die oberwärts gerichteten Flächen, welches der Erfahrung zuwider wäre. Jedoch läßt sich nicht mit Gewißheit behaupten, daß eine solche Ursach der Schwere vorhanden sei. Denn es könnte die Schwere auch von irgend einer andern Macht herrühren, deren Wirkungsart uns Menschen gänzlich unbekannt wäre.

Man hat überhaupt wider das Annehmen so vieler unsichtbarer Flüssigkeiten eingewendet, daß es fast unmöglich scheinet, daß dieselben sich bewegen können, ohne einander zu hindern und zu stören. Hierauf läßt sich aber antworten, daß mehrere derselben vielleicht nur eine einzige Art Materie sind, welche in verschiedenen Umständen bald die eine, bald die andere Wirkung hervorbringet. Auch läßt sich wohl begreifen, daß zwischen den Theilchen eines flüssigen Wesens, zum Exempel der Luft, genug Oeffnungen oder Poren vorhanden sind, um daß sich eine feinere Flüssigkeit ohne vielen Widerstand dadurch bewegen könne.

§. 20.

Nach der bewegenden Macht, und den bewegbaren Körpern, war das dritte was in Betrachtung kam der Weg oder die Bahn oder der zurückgelegte Raum. Dieser wird meistens als eine bloße Linie betrachtet, welche der Schwerpunkt des Körpers durchläuft. Die Länge dieser Linie wird durch gewöhnliche Längenmaaße bestimmet. Zum Ex. durch Fuß, Zoll, u. s. w. Die Gestalt der Bahn machet daß die Bewegung entweder geradlinicht, oder krummlinicht genannt wird. Wenn der Körper sich in einer geraden Linie bewegt, so stellet man sich vor, daß er nach einer gewissen Weltgegend, oder nach einem sehr entfernten Punkte hingehen will, und in dieser Rücksicht wird die Linie, die er beschreibet, seine Richtung genannt. Auch alle Linien, welche in der Nähe der geraden Bahn parallel gezogen werden, bestimmen die Richtung des Bewegbaren.

Wenn die Bahn eine krumme Linie ist, so stellet man sich vor, der Körper wolle anfänglich in einer gewissen Richtung fortgehen, im folgenden Augenblicke aber weiche er um ein geringes davon ab, eben so im dritten Augenblicke u. s. w. Man kann also sagen, daß ein Körper der eine krumme Linie beschreibet, alle Augenblicke, oder beständig, seine Richtung verändert.

§. 21.

Zulezt muß noch die Zeit oder Dauer der Bewegung betrachtet werden. Diese wird bekannter maßen in Tagen,

gen, Stunden, Minuten, Sekunden, Terzien, Quarten, Quinten, Sechsten u. s. f. berechnet. Der Tag wird in 24 gleiche Stunden eingetheilet, jede Stunde in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden, jede Sekunde in 60 Terzien u. s. w, allemal durch 60theilige Brüche. Ein Beispiel wird zeigen, wie man diese Eintheilungen auf eine kurze Art ausdrücket.

$$3^t\ 5^s\ 45'\ 32''\ 0'''\ 15^{IV}\ 0^V\ 30^{VI}$$

wird gelesen: 3 Tage, 5 Stunden, 45 Minuten, 32 Sekunden, keine Terzien, 15 Quarten, keine Quinten, 30 Sechsten.

Da die lezteren Eintheilungen sehr klein und ganz unmerklich werden, so pfleget man meistens nur bis zu den Sekunden oder Terzien zu gehen, und das übrige aus der Acht zu lassen.

Längere Zeiträume werden auch in Wochen, Monaten, Jahren, Jahrhunderten gerechnet, welche grössere Zeitmaaße aber in der Mechanik selten vorkommen.

§. 22.

Aus dem mit dem Begriffe der Zeit verbundenen Begriffe des Weges, entstehet der zusammengesezte Begriff der Geschwindigkeit. Denn die Geschwindigkeit, im mechanischen Verstande, ist nichts anders, als der Weg, den ein Körper in der Einheit der Zeit zurükleget. Wenn man also die Zeit in Sekunden rechnet, so ist die Geschwindigkeit der in einer Sekunde durchlaufene Weg. Dieses stimmet mit dem allgemeinen Sprachgebrauche überein. Denn, wenn nach der Geschwindigkeit gefraget wird, womit jemand reiset, so wird allemal geantwortet, er lege jeden Tag, oder jede Stunde, so und so viel Weges zurück.

§ 23.

§. 23.

Ein Körper beweget sich mit **einförmiger Bewegung**, oder genauer zu reden, mit **einförmiger Geschwindigkeit**, wenn seine Geschwindigkeit in allen Zeittheilen einerlei bleibet, das heißt, wenn er in gleichen Theilen der Zeit allemal gleiche Theile seines Weges durchläuft. Und wenn die Bewegung wahrhaftig einförmig sein soll, so muß die angeführte Bedingung allemal statt finden, so klein man auch die Zeittheile annehmen mag. Hingegen, wenn die Geschwindigkeit sich verändert, so daß in gleichen Zeittheilen ungleiche Theile des Weges zurück geleget werden, so entstehet eine **veränderliche Bewegung**, oder eine **veränderliche Geschwindigkeit**. In diesem lezten Falle kann es nun geschehen, daß die Geschwindigkeit, (nämlich der in der Einheit der Zeit zurükgelegte Weg), entweder nach und nach zunehme, oder allmählig abnehme, oder wechselsweise zunehme oder abnehme. Daher wird die veränderliche Bewegung wiederum eingetheilet in eine **beschleunigte**, eine **verspätete**, und eine **vermischte** Bewegung.

§. 24.

Bei der einförmigen Bewegung gilt allemal diese Regel: **daß der durchlaufene Weg gefunden wird, wenn man die Geschwindigkeit mit der Zeit multipliziret.** Z. E. wenn ein bewegter Körper in jeder Sekunde 50 Fuß Weges durchläuft, und wenn die Bewegung 3 Sekunden lang dauret, so ist offenbar, daß der ganze durchlaufene Weg gefunden wird, wenn man die 50 Fuß Geschwindigkeit mit 3, als der Anzahl der Zeittheile, multipliziret. Es sei also überhaupt w der zurückgelegte Weg, z die verflossene Zeit, und g die Geschwindigkeit, so hat man diese Gleichung:

$$w = g \cdot z$$

Hier

Hier drücket allemal z eine gewisse Anzahl von Zeittheilen, zum Beispiel Sekunden aus, g bedeutet eine gewisse Anzahl von Längenmaaßen, zum Exempel Fuße, die in einem Zeittheile durchlaufen werden, w zeiget alsdann die durchlaufenen Theile des Weges, in eben solchen Längenmaaßen an.

§. 25.

Obgleich die angeführte Gleichung nur eigentlich von der einförmigen Bewegung gilt, so kann sie doch auch bei jeder veränderlichen Bewegung gebrauchet werden, wenn man nur unter g die mittlere Geschwindigkeit während der ganzen Dauer der Bewegung verstehet. Diese mittlere Geschwindigkeit wird gefunden, wenn man alle sekundenweise durchlaufene Fuße durch die Anzahl der Sekunden dividirt. Uebrigens kann man hier anstatt der Sekunde jedes andere Zeitmaaß, und anstatt des Fußes jedes andre Längenmaaß gebrauchen. Gesezt also, der bewegte Körper habe sich nach und nach mit folgenden Geschwindigkeiten beweget:

1te Sekunde : : :	10 Fuß.
2te Sekunde : :	15 Fuß.
3te Sekunde : : :	17 Fuß.
4te Sekunde : :	16 Fuß.
5te Sekunde : : :	13 Fuß.
6te Sekunde : :	24 Fuß.

So bekömmt man für die mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{10+15+17+16+13+24}{6} = \frac{95}{6} = 15\tfrac{5}{6}$$

Folglich ist es eben so gut, als wenn der Körper sich mit einer einförmigen Geschwindigkeit von $15\frac{5}{6}$ Fuß sekunden-

sekundenweise beweget hätte, und der ganze durchlaufene Weg wird, nach der allgemeinen Regel, 6mal $15\frac{5}{8}$.

§. 26.

Aus der Gleichung $w = g \cdot z$ folgen zwei andere, nämlich

$$g = \frac{w}{z}$$

und $$z = \frac{w}{g}$$

Die erste von diesen beiden giebt zu erkennen, daß die Geschwindigkeit gefunden wird, wenn man den Weg durch die Zeit dividiret; und die zweite lehret, daß man die Zeit erhält, wenn man den Weg durch die Geschwindigkeit dividiret. Beides ist auch ohnehin schon aus der Natur der Sache begreiflich genug. Einige Beispiele werden dieses noch mehr erläutern.

Ein bewegter Körper hat in 20 Sekunden 235 Fuß Weges zurückgelegt, wie groß war seine einförmige oder mittlere Geschwindigkeit:

Antwort: $\frac{235}{20} = 11\frac{3}{4}$ Fuß sekundenweise.

Ein Körper ist in einer Viertel-Sekunde $\frac{2}{5}$ Fuß weit gekommen, welches war seine Geschwindigkeit? Antwort: $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$ Fuß sekundenweise. Hier könnte es einen Anfänger befremden, daß die Geschwindigkeit größer wird, als der ganze zurückgelegte Weg. Man muß aber bedenken, daß die Geschwindigkeit allemal so berechnet wird, als wenn die Bewegung eine ganze Sekunde lang gedauret hätte. Hat sie also weniger Zeit gedau-

gedauret, so muß natürlicher Weise die Geschwindigkeit kleiner werden, als der zurückgelegte Weg.

Ein Körper läuft 100 Fuß weit, mit einer Geschwindigkeit von 15 Fuß jede Sekunde, wie viel Zeit dauret die Bewegung? Antwort $\frac{100}{15} = 6\frac{2}{3}$ Sekunden.

Ein Körper soll einen Weg von 12 Fuß, mit einer Geschwindigkeit von 18 Fuß Sekundenweise durchlaufen, Wie lange wird die Bewegung dauren?

Antwort: $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ Sekunde.

§. 27.

Wenn man sich erinnert, was im vorigen Hauptstücke (I Hauptst. §. 19.) von den Verhältnissen gesagt worden, welche man aus einer Gleichung zwischen veränderlichen Größen ziehen kann; so bekömmt man auch hier eine Menge dergleichen Verhältnisse.

Aus der Gleichung $w = g \cdot z$ siehet man, daß, wenn verschiedene Körper sich einförmig bewegen, alsdann die zurückgelegten Wege sich zusammengesezt verhalten wie die Geschwindigkeiten und die Zeiten. Sind die Zeiten gleich, so verhalten sich die Wege bloß wie die Geschwindigkeiten. Sind die Geschwindigkeiten gleich, so verhalten sich die Wege wie die Zeiten.

Aus der Gleichung $g = \frac{w}{z}$, muß man schließen, daß die Geschwindigkeiten bei einförmigen Bewegungen sich verhalten, gerade wie die Wege, und umgekehrt

kehrt wie die Zeiten. Sind also die Zeiten gleich, so verhalten sich die Geschwindigkeiten bloß wie die Wege. Sind die Wege gleich, so verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Zeiten.

Aus der Gleichung $z = \frac{w}{g}$ erkennet man, daß bei verschiedenen einförmigen Bewegungen; die verflossenen Zeiten sich verhalten, gerade wie die zurückgelegten Wege, und umgekehrt wie die Geschwindigkeiten. Bei gleichen Geschwindigkeiten verhalten sich folglich die Zeiten wie die Wege, und bei gleichen Wegen verhalten sich die Zeiten umgekehrt wie die Geschwindigkeiten.

§. 28.

Ein Produkt behält seinen Werth unverändert, wenn beide Faktoren sich nach einem umgekehrten Verhältnisse verändern, das heißt, wenn der eine so vielmal größer wird, als der andere kleiner wird.

Da also $w = g . z$, so wird w den nämlichen Werth behalten, wenn g so vielmal abnimmt als z zunimmt, oder wenn g so vielmal zunimmt als z abnimmt, oder wenn die Werthe von g sich umgekehrt verhalten wie die zustimmenden Werthe von z.

Daher muß man schließen, daß die zurückgelegten Wege gleich werden, wenn sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Zeiten verhalten.

§. 29.

Ein Bruch behält den nämlichen Werth, wenn der Zähler und der Nenner gleich vielmal zunehmen oder abnehmen, das heißt, wenn der alte Zähler sich zum neuen verhält wie der alte Nenner zum neuen. Da also $g = \frac{w}{z}$, so folget, daß g einerlei bleiben wird, wenn zwei verschiedene Werthe von w sich verhalten wie die zustimmenden Werthe von z.

Folglich sind die Geschwindigkeiten gleich, wenn die Wege sich eben so verhalten, wie die Zeiten.

Da auch $z = \frac{w}{g}$, so muß man schließen, daß die **verflossenen Zeiten gleich sind, wenn die Wege sich verhalten, wie die Geschwindigkeiten.**

§. 30.

Da wir nun von der Geschwindigkeit eines bewegten Körpers einen deutlichen Begriff gegeben haben, so läßt sich auch die Größe der Kraft bestimmen, welche erforderlich ist, um jeden Körper in Bewegung zu setzen. Um dieses desto bequemer zu verrichten, nehmen wir zum Maaße der Kraft diejenige Kraft an, welche hinlänglich ist, um die Einheit der Masse mit der Einheit der Geschwindigkeit zu bewegen. Es sei zum Exempel ein Grad der Kraft erforderlich um ein Pfund Masse in jeder Sekunde einen Fuß weit zu treiben; so ist klar, daß 2, 3, 4 Pfund Masse, welche ebenfalls in der Einheit der Zeit 1 Fuß weit getrieben werden sollen, 2, 3, 4 Grad der Kraft erfordern. Ueberhaupt, bei gleicher Geschwindigkeit, wenn die Masse m Einheiten enthält, so muß die Kraft auch m Grad haben. Gesetzet nun weiter, die Geschwindigkeit soll einige mal grösser werden, so muß wiederum die Kraft eben so viel mal vergrössert werden. Wenn also die Geschwindigkeit sekundenweise g Fuß betragen soll, so muß deswegen die

Kraft

Kraft g mal vergrössert werden. Wenn also, wie angenommen worden, 1 Grad der Kraft erforderlich ist, um 1 Pfund sekundenweise 1 Fuß weit zu treiben, und es ist eine Masse von m Pfund gegeben, welche mit einer Geschwindigkeit von g Fuß getrieben werden soll, so gehören dazu erstlich m Grad der Kraft, wegen der $m$fachen Masse; diese Kraft aber muß wegen der $g$fachen Geschwindigkeit noch g mal größer werden; sie enthält also mg Grad. Ein Beispiel wird dieses noch deutlicher machen. Gesetzt ein Mensch treibet eine Masse von 1 Pfund 1 Fuß weit in einer bestimmten Zeit, z. E. in einer Sekunde. Ein anderer treibet in der nämlichen Zeit eine Masse von 4 Pfund auch 1 Fuß weit, so wendet dieser 4 mal mehr Kraft an, als der erste. Nun komme ein dritter, welcher die 4 pfündige Masse immer in derselbigen Zeit 3 Fuß weit treibet, so wendet dieser 3 mal mehr Kraft an als der zweite. Und da der zweite 4 mal mehr anwendet als der erste, so gebrauchet der lezte 3mal 4mal oder 12mal mehr Kraft als der erste. Wird demnach dem ersten 1 Grad der Kraft zugeschrieben, so gebrauchet der lezte 12 Grad. Es sei überhaupt k der erforderliche Grad der Kraft, m die zu bewegende Masse, g die Geschwindigkeit womit sie beweget werden soll, so erhellet aus obigen Erläuterungen, daß

$$k = m . g$$

oder daß man den Grad der Kraft erhält, wenn man die Masse mit der Geschwindigkeit multipliziret.

§. 31.

Die nämliche Gleichung gilt auch von der Quantität oder Größe der Bewegung, welche man ebenfalls unter k verstehen kann. Denn, wenn wir diejenige Bewegung, welche statt findet, wenn ein Pfund Masse sich mit 1 Fuß Geschwindigkeit beweget, für 1 Grad der Bewegung annehnen, so wird m mal so viel Bewegung vorhanden sein, wenn die Masse m Pfund enthält. Ferner wird die Bewegung wiederum g mal größer, wenn die Masse sich mit einer Geschwindigkeit von g Fuß beweget. Wird demnach die Quantität der Bewegung mit b ausgedrücket, so ist auch

$$b = m. g$$

Daß die Masse, und nicht bloß die Geschwindigkeit die Grösse der Bewegung bestimmet, ist leicht einzusehen. Denn wo mehrere materielle Theile einen gewissen Weg zurück legen, ist gewiß mehr Bewegung vorhanden, als wo wenigere solche Theile den nämlichen Weg durchlaufen. In diesem Verstande wird ein jeder sagen, daß mehr Bewegung vorhanden ist, wo 100 Menschen laufen, als wo nur einer läuft.

Hieraus erhellet zugleich, daß die erforderlichen Kräfte sich eben so verhalten, wie die Quantitäten der Bewegungen, welche sie hervorbringen sollen. Denn da

$$k = m\ g$$

und auch $b = m\ g$

so ist $k = b$

Folglich, so wie b zunimmt oder abnimmt, so muß auch k zunehmen oder abnehmen.

§. 32.

Aus der Gleichung $k = m\,g$ folget, daß

$$g = \frac{k}{m}$$

und $$m = \frac{k}{g}$$

Man

Man erhält also die Geschwindigkeit, wenn man die Kraft durch die Masse dividiret; und man bekömmt die Masse, wenn man die Kraft durch die Geschwindigkeit dividiret. Zum Exempel, wenn ein Körper sich mit 36 Grad Kraft, und einer Masse von 9 Pfund beweget, so ist seine Geschwindigkeit $\frac{36}{9} = 4$ Fuß sekundenweise, gesezt nämlich, daß die Wirkung der Kraft ebenfalls in Fuß und Sekunden bestimmet worden. Es sei ferner ein Körper, der sich mit 5 Grad Kraft und mit 100 Fuß Geschwindigkeit beweget, so ist seine Masse $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ Pfund.

§. 33.

Aus den drei Gleichungen $k = mg$, $g = \frac{k}{m}$ und $m = \frac{k}{g}$, lassen sich eben solche Verhältnisse folgern, wie oben (§. 27, 28, 29) aus den Gleichungen $w = gz$, $g = \frac{w}{z}$ und $z = \frac{w}{g}$. Denn da $k = mg$, so verhalten sich die Kräfte zusammengesezt wie die Massen und die Geschwindigkeiten. Bei gleichen Geschwindigkeiten verhalten sich die Kräfte wie die Massen. Wenn die Massen sich umgekehrt verhalten wie die Geschwindigkeiten, so sind die Kräfte gleich.

Ferner, da $g = \frac{k}{m}$, so verhalten sich die Geschwindigkeiten gerade wie die Kräfte und umgekehrt wie die Massen. Bei gleichen Massen verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Kräfte. Bei gleichen Kräften verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Massen. Die Geschwindigkeiten sind gleich, wenn die Kräfte sich verhalten wie die Massen.

Weil $m = \frac{k}{g}$, so verhalten sich die Massen gerade wie die Kräfte, und umgekehrt wie die Geschwindigkeiten. Bei gleichen Geschwindigkeiten verhalten sich die Massen wie die Kräfte. Bei gleichen Kräften verhalten sich die Massen umgekehrt wie die Geschwindigkeiten. Die Massen sind gleich, wenn die Kräfte sich verhalten wie die Geschwindigkeiten.

§. 34.

Bisher haben wir drei Hauptgleichungen gefunden, welche in der Mechanik sehr häufig gebrauchet werden, nämlich

1) $m = d.\,G$
2) $w = g.\,z$
3) $k = m.\,g$

Wenn wir in der dritten anstatt m dessen Werth $d.\,G$ aus der ersten setzen, so bekommen wir

$$k = d.\,G.\,g$$

Und wenn wir in der dritten anstatt g dessen Werth $\frac{w}{z}$ aus der zweiten setzen, so bekommen wir noch

$$k = \frac{m\,w}{z}$$

Aus diesen beiden neuen Gleichungen lassen sich wiederum die Werthe von d, G, g, m, w und z ziehen, zum Beispiel $G = \frac{k}{d\,g}$, $z = \frac{m\,w}{k}$ u. s. w.

Aus

Aus den nämlichen neuen Gleichungen lassen sich auch verschiedene Verhältnisse ziehen. Zum Exempel, da $k = d. G. g$, so verhalten sich die Kräfte zusammengesezt wie die Dichtigkeiten, die Größen und die Geschwindigkeiten. Ferner, da $k = \frac{m\ w}{z}$, so verhalten sich auch die Kräfte gerade wie die Massen und Wege, umgekehrt aber wie die Zeiten, u. s. w.

§. 35.

Wenn eine Kraft auf einen Körper wirket, der durch einen unüberwindlichen Widerstand aufgehalten wird, so haben wir schon angemerket (§ 10), daß solche Kraft von einigen Mechanikern eine todte Kraft genannt wird. Es scheinet mir aber diese Redensart nicht vollkommen passend zu sein. Denn eigentlich wird die Kraft nicht dermaßen durch den Widerstand getödtet oder vernichtet, daß sie ohne alle Wirkung bleibe, sondern sie äußert sich alsdann durch einen bloßen Druck, oder durch einen augenblicklichen Stoß. Zum Exempel die Fallkraft bleibet nicht ohne alle Wirkung, wenn der Körper gestützet wird, sondern sie drücket den Körper gegen die Stütze, aus welchem Drucke eigentlich die Schwere entstehet.

Eine solche Kraft muß wie jede andere nach der Masse und Geschwindigkeit beurtheilet werden. Da aber hier keine wirkliche Geschwindigkeit statt findet, so muß bloß diejenige Geschwindigkeit in Anschlag genommen werden, welche der Körper von der Kraft erhalten würde, wenn er frei und ungehindert wäre. Diese Geschwindigkeit, welche nicht gesehen, sondern bloß gedacht werden kann, wird die **virtuelle**, oder **seinsollende** Geschwindigkeit genannt. Multipliziret man diese virtuelle Geschwindigkeit mit der Masse, so bekömmt man diese vermeinte todte Kraft, wovon eben jezt geredet worden. Es wäre also vielleicht schicklicher, dieselbe eine **virtuelle Kraft** zu nennen.

Bei der Geschwindigkeit, wovon hier die Rede ist, muß noch angemerket werden, daß dieselbe so gedacht werden muß, wie sie im ersten Augenblicke nach dem Stoße oder Drucke sein würde, nicht aber in den folgenden Zeittheilchen, da sich dieselbe aus verschiedenen Ursachen gar bald verändern könnte.

Wenn man also saget, daß eine Kraft, welche bloß den Widerstand drücket, durch $m\,g$ vorgestellet wird, so bedeutet g denjenigen Weg, welchen der Körper in einer Sekunde zurücklegen könnte, gesetzet daß er frei wäre, und daß er sich während der ganzen Sekunde so bewegte, wie im erstem unendlich kleinen Zeittheilchen. Zum Exempel, laßt uns annehmen, der Körper werde so von der Kraft gereizet, daß er im ersten Hundert-Millionen-Theilchen einer Sekunde, ein Millionen-Theilchen eines Fußes zurück legen würde, so ist seine Geschwindigkeit $\frac{w}{z} = \frac{0{,}000001}{0{,}00000001} = 100$. Also hat der Körper in diesem Falle eine virtuelle Geschwindigkeit von 100 Fuß, welches folglich nicht bedeutet, daß er wirklich 100 Fuß durchlaufen würde, (welches oft betrüglich sein könnte,) sondern daß er sich anfänglich so bewegen würde, als wenn er sekundenweise 100 Fuß mit einförmiger Bewegung zurück zu legen hätte.

Da die Kräfte im nämlichen Verhältnisse stehen, wie die Quantitäten der Bewegungen, so muß dieses auch, bei virtuellen Kräften statt finden. Demnach müssen wir auch virtuelle Bewegungen annehmen. Es ist also die virtuelle Bewegung eines Körpers gleich dem Produkte aus seiner Masse, und seiner virtuellen Geschwindigkeit.

Drittes Hauptstück.

Von den Gesetzen der Bewegung und des Gleichgewichtes.

§. 1.

Die Erfahrung lehret uns, daß die Natur bei allen Bewegungen gewisse allgemeine Regeln beobachtet, als wären es Gesetze denen sie folgen muß. Diese Regeln werden demnach die Gesetze der Bewegung genannt. Im Grunde sind sie für uns weiter nichts als allgemeine Erfahrungen, wodurch wir viele andere Erscheinungen erklären können, von welchen uns aber unbewußt ist, ob sie sich selbst noch aus ferneren Ursachen herleiten lassen.

Die Philosophen sind darinn nicht einig, ob die Gesetze der Bewegung in sich selbst nothwendig sind, so daß sie aus der Natur der Dinge selbst herfließen, oder ob es ganz willkührliche Regeln sind, nach welchen der Schöpfer gewollt hat, daß die Materie sich so und nicht anders bewege. Für einen Mathematiker aber ist es genug, daß diese Gesetze durch die Erfahrung bestätiget sind, und als sichere Gründe gebrauchet werden können.

§. 2.

Das erste Gesetz der Bewegung ist dieses: **Wenn ein Körper in Ruhe ist, so bleibet er in Ruhe, so lange ihn keine Kraft zur Bewegung reizet.** Denn wir bemerken nicht, daß irgend ein Körper in der Natur von selbst anfange sich zu bewegen, sondern wenn die Bewegung anfängt, so lässet sich allemal eine Kraft angeben, welche dieselbe verursacht hat. Die Materie scheinet folglich an und für sich selbst ein todtes Wesen zu sein. Wenn also ein Körper durch einen andern, dieser durch einen zweiten, dieser durch einen dritten u. s. f. in Bewegung gesetzet wird, so muß man zulezt auf eine bewegende Macht zurück kommen, die nicht materiell ist. Auf der Erde entstehen viele Bewegungen durch den Willen der Menschen und Thiere. Die übrigen Bewegungen aber müssen ihren Ursprung in den Willen eines höheren Wesens haben.

§. 3.

Das zweite Gesetz lautet also: **Wenn ein Körper einmal in Bewegung gesetzet worden, so fährt er fort sich von selbst in der nämlichen Richtung und mit unveränderter Geschwindigkeit zu bewegen, bis daß er Hindernisse oder Widerstände antrifft, die seine Bewegung verspäten oder gänzlich hemmen.** Dieses Gesetz wird wiederum durch die tägliche Erfahrung bestätigt. Wenn eine Macht einen Körper eine kurze Zeit lang fortgetrieben hat, und ihn nun sich selbst überläßt, so möchte man meinen, der Körper, der jezt nicht mehr von der bewegenden Macht berührt wird, müßte in Ruhe bleiben. Es geschiehet aber gerade das Gegentheil. Denn er setzet seinen Weg fort, als wenn er immer noch von der Kraft verfolget würde.

Diesen Weg setzet er mit unveränderter Geschwindigkeit fort. Denn es lassen sich allemal die Hindernisse und Widerstände angeben, welche die Bewegung verspäten. Zum Exempel: Eine geschossene oder geworfene Kugel beweget sich durch die Luft geschwinder als durch das Wasser, und durch eine dünnere Luft geschwinder als durch eine dickere. Woraus man folgern muß, daß sie in einem ganz leeren Raume ihre anfängliche Geschwindigkeit behalten würde.

Die

Die Richtung bleibet auch unverändert; denn es lassen sich ebenfalls jedesmal die Kräfte angeben, welche dieselbe verändern. Zum Exempel: Eine geworfene Kugel sezet nicht ihren Weg in gerader Linie fort, sondern neiget sich allmählig zur Erde. Wer siehet aber nicht, daß dieses von der Fallkraft herrühret, welche in Verbindung mit der Kraft des Wurfes auf die Kugel wirket? Wäre also diese Fallkraft nicht vorhanden, so würde die Kugel in derselbigen Richtung fortlaufen, in welcher sie ihre Bewegung angefangen hat: und wäre dabei der Mittelraum vollkommen leer, so würde sie eine gerade Linie beschreiben, welche ins unendliche fortgehen würde. Es ist schwer zu begreifen, was eigentlich diese fortgesezte Bewegung verursachet. Die Alten glaubten, es wäre die Luft, welche sich hinter dem bewegten Körper schliesset, und ihn fortstößt. Bei einer genaueren Betrachtung aber findet sichs, daß die Luft vielmehr die gewöhnlichste Ursach ist, welche die Bewegung verspätet. Sollte vielleicht der Aether, oder die reine Himmelsluft, durch eine uns unbekannte Wirkungsart diese Erscheinung verursachen? Es hilft aber nichts, wenn wir Unbekanntes durch Unbekanntes erklären wollen. Wir müssen demnach dabei bleiben, daß wir das gegenwärtige Bewegungsgesez als eine Erfahrungswahrheit annehmen.

§. 4.

Wenn man beide vorigen Geseze zusammenfaßt, so entstehet daraus ein einziges, welches also lautet: **jeder Körper bleibet in seinem Zustande der Ruhe oder der einförmigen geradlinichten Bewegung, so lange nichts vorhanden ist, was ihn zwinget, diesen Zustand zu verändern.**

Diese Beharrlichkeit der Körper, in ihrem Zustande zu verbleiben, ist allemal mit einem Widerstande verbunden,

den, welchen sie gegen jede Kraft ausüben, die solchen Zustand verändern will. Man gedenket sich also, sowohl bei einem ruhenden, als bei einem bewegten Körper, ein gewisses Bestreben, in seinem jetzigen Zustande zu verbleiben, und nennet es die **Inerzie** oder **Trägheit** der Körper. Auch wird das eben angeführte allgemeine Gesetz, das **Gesetz der Inerzie** genannt. Jedoch scheinet das Wort **Inerzie** oder **Trägheit** weit besser auf den Zustand der Ruhe, als auf den Zustand der Bewegung zu passen, da man nicht leicht sagen wird, ein Körper sei träge oder faul, wenn er sich in seiner Bewegung nicht gern aufhalten läßt. Einige belegen die fortgesetzte Bewegung eines sich selbst überlassenen Körpers mit den Namen der **eingedrückten Kraft** (vis impressa). Man könnte sie auch den **Schwung** oder die **Schwung-Kraft** nennen.

§. 5.

Wenn zwei oder mehrere Kräfte in einerlei Richtung auf einen Körper wirken, so vereinigen sie ihre Wirkung dermaßen, daß der Erfolg eben so groß ist, als wenn er aus einer Kraft entstanden wäre, welche der Summe der zusammenwirkenden Kräfte gleich wäre. Zum Exempel: Gesetzet, zwei Menschen stoßen zugleich eine Kugel an, der eine mit einer Kraft, welche im Stande ist, die Kugel in einer Sekunde 10 Fuß weit zu treiben, der andere mit einer Kraft, welche allein die Kugel 15 Fuß weit stoßen würde. Wirken nun beide Kräfte in einerlei Richtung, so wird die Kugel in einer Sekunde $10 + 15$, oder 25 Fuß weit gehen. Denn da hier die Masse der Kugel unverändert bleibet, so hänget der Erfolg oder die Quantität der Bewegung bloß von der Geschwindigkeit ab, welche also die Summe beider Geschwindigkeiten ausmachen wird. Uebrigens setzen wir hierbei voraus, daß die Bewegung im leeren Raume geschie-

geschiehet, oder wenigstens in einem Raume, worin der Widerstand unmerklich ist.

§. 6.

Wenn zwei Kräfte in entgegengesezten Richtungen auf einen Körper wirken, so folget der Körper der Richtung der grösseren Kraft, aber nur mit einer Quantität der Bewegung, welche dem Unterschiede beider Bewegungen gleich ist. Zum Exempel, wenn obgedachte Kugel in entgegengesezten Richtungen von zwei Kräften getrieben wird, deren eine ihr eine Geschwindigkeit von 15 Fuß, die andere aber von 10 Fuß geben würde, so gehorchet die Kugel der ersteren Kraft, und läuft mit einer Geschwindigkeit von 15 — 10 oder 5 Fuß.

§. 7.

Wenn zwei gleiche Kräfte auf einen Körper in entgegengesezter Richtung wirken, so hebet die eine die andere auf, und der Körper bleibet in Ruhe, welche erzwungene Ruhe, wie schon erinnert worden, ein Gleichgewicht genannt wird.

§. 8.

Die drei vorhergehenden Gesetze können wiederum in eines zusammengefaßt werden, nämlich: **wenn ein Körper von zwei Kräften, die in derselbigen gerader Linie wirken, zur Bewegung gereizet wird, so bekömmt er eine Bewegung, oder (welches hier einerlei ist) eine Geschwindigkeit, welche der algebraischen Summe beider eingedrückten Bewegungen gleich ist.** Unter der algebraischen Summe verstehet man entweder die wirkliche arithmetische Summe, oder die arithmetische Differenz, je nachdem die Richtung beider Kräfte einerlei oder entgegengesetzet ist.

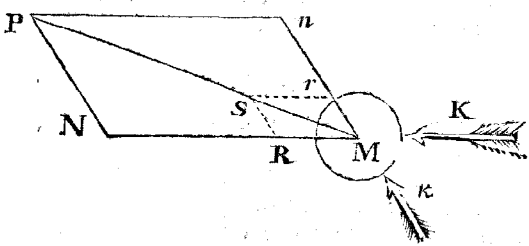
Es

Es sei die eine Kraft K und die andere k, so wirken sie beide wie eine einzelne Kraft, welche im Falle von einerlei Richtung $K + k$ und im Falle der entgegengesezten Richtung $K - k$ beträgt. Wenn im lezten Falle beide Kräfte gleich sind, so ist $K - k = o$, welches zu erkennen giebt, daß alsdann beide Kräfte so wirken, als wenn keine Kraft vorhanden wäre, und folglich bleibet der Körper unbewegt.

Wenn nicht nur zwei Kräfte, sondern mehrere in einer geraden Linie auf den Körper wirken, so muß man in der algebraischen Summe alle diejenigen als positiv annehmen, die in einerlei Richtung wirken. Hingegen werden diejenigen negativ, welche in entgegengesezter Richtung wirken.

Dieses allgemeine Gesez scheinet der gesunden Vernunft so angemessen zu sein, daß keiner so leicht dagegen etwas einwenden wird. Jedoch, um mehrerer Sicherheit willen hat man es noch durch Versuche bestätiget, und allemal richtig befunden.

§. 9.



Wenn ein Körper von zwei verschiedenen Kräften zur einförmigen Bewegung gereizet wird, so erhält er eine Richtung und eine einförmige Geschwindigkeit, welche durch die Diagonal-Linie des Parallelograms ausgedrücket werden, dessen

Seiten

Seiten durch ihre Lage und Größe die Richtungen und Geschwindigkeiten ausdrücken, welche der Körper, vermöge jeder Kraft insbesondere bekommen würde. Zum Beispiel, der Körper M wird von der Kraft K so gestoßen oder getrieben, daß er in einer Sekunde die Linie MN durchlaufen müßte. Zu gleicher Zeit wird er von einer anderen Kraft *k* gestoßen oder getrieben, vermöge welcher er in einer Sekunde die Linie M*n* durchlaufen müßte. Ziehet man nun NP mit M*n*, und *n*P mit MN parallel, so entstehet das Parallelogramm *n*N und die Diagonal-Linie MP ist der Weg, welchen der Körper M in einer Sekunde mit einförmiger Bewegung durchlaufen wird.

Dieses wichtige Gesetz der Bewegung läßt sich durch verschiedene untrügliche Versuche bestätigen. Es läßt sich auch aus natürlichen Gründen beweisen, obgleich nicht mit einer solchen Strenge, wie mathematische Wahrheiten bewiesen werden müssen. Lasset uns erstlich annehmen, daß die Kräfte eine fortdaurende Wirkung haben. Es stelle zum Exempel die Kraft K einen Strom vor, welcher den Körper in der Richtung und mit der Geschwindigkeit MN von Westen nach Osten forttreibet. Die andere Kraft *k* sei der Wind, welcher zugleich den nämlichen Körper M in der Richtung und mit der Geschwindigkeit M*n* nach Süd-Osten hintreibet. So muß der Körper M, vermöge der Kraft des Stromes, nach Verfließung einer Sekunde um die Weite MN oder *n*P von Westen nach Osten fortgerücket sein. Zu gleicher Zeit aber muß der nämliche Körper M, dem Winde gehorchend, um die Weite M*n* oder NP nach Süd-Osten fortrücken. Es kann aber beides zugleich nicht anders geschehen, als wenn der Körper sich nach der Verfließung einer Sekunde in P, das ist, im entgegengesezten Winkel des Parallelogramms N*n* befindet. Anstatt einer Sekunde lasset uns nun einen kleineren Zeittheil,

theil, zum Exempel, den dritten Theil einer Sekunde annehmen. Setzen wir nun, daß die Kräfte mit einförmiger Geschwindigkeit wirken, so müßte der Strom für sich allein den Körper M bis in R fortbringen, so daß MR der dritte Theil von MN wäre. Desgleichen würde der Wind den Körper M bis in r hinführen, so daß M r wiederum der dritte Theil von Mn wäre. Nun ziehe man rS mit MR und RS mit Mr parallel, so entstehet das Parallelogram r R. Man ziehe ferner MS, und SP. Da nun MR der dritte Theil von MN, und Mr auch der dritte Theil von Mn ist, so verhält sich MR zu MN wie Mr zu Mn. Es ist aber Mr = RS, und Mn = NP. Also verhält sich MR zu MN wie RS zu NP, oder MR zu RS wie MN zu NP. Dieses Verhältniß giebt zu erkennen, daß MNP ein geradlinichtes Dreieck ist, und daß folglich die Punkte M, S und P in einer geraden Linie liegen. Es ist aber der Punkt S derjenige, wo sich der Körper M nach dem dritten Theile einer Sekunde befinden muß, aus dem nämlichen Grunde vermöge dessen er sich nach der ganzen Sekunde in P befinden mußte. Da nun der nämliche Beweis allemal gilt, man mag den Theil der Sekunde so groß oder so klein annehmen als man will, so befindet sich der zustimmende Punkt S allemal in einer geraden Linie mit den Punkten M und P. Woraus dann erhellet, daß der Körper M sich allemal in der Diagonallinie MP befindet, und dieselbe wirklich durchläuft.

Da man anstatt einer Sekunde auch einen größeren Zeittheil hätte annehmen können, zum Exempel eine Stunde, einen Tag, u. s. f. so gilt diese Regel in allen Fällen, so lange nämlich beide Mächte mit unveränderter Kraft auf den Körper wirken. Es ist aber nicht genug, daß wir bewiesen haben, der Körper M durchlaufe wirklich die Diagonal-Linie MP. Es muß noch gezeiget werden, daß er sie mit einförmiger Geschwindigkeit durchläuft. Weil im

Dreiecke

Dreiecke MNP die Linie RS mit NP parallel ist, so verhält sich MS zu MP wie MR zu MN. Es verhielten sich aber die Wege MR und MN wie die verflossenen Zeiten. Folglich verhalten sich auch MS und MP wie die verflossenen Zeiten. Also ist die Bewegung längs der Diagonallinie MP eine einförmige Bewegung.

So bald anerkannt worden, daß das angeführte Gesetz in dem Falle gilt, wo die Kräfte ihre Wirkung fortsetzen, und beständig den Körper verfolgen, so muß man zugeben, daß das nämliche Gesetz auch für solche Kräfte gilt, die nur durch einen augenbliklichen Stoß wirken. Denn, so kurz auch die Dauer des Stoßes sein mag, so dauret er doch eine gewisse Zeit lang, während welcher die Kräfte eine fortgesezte Wirkung äussern, vermöge welcher der Körper, aus den vorhergehenden Gründen, die kleine Diagonallinie mit einförmiger Geschwindigkeit durchläuft. Wenn er nun sich selbst überlassen ist, so muß er von selbst die angefangene Linie mit unveränderter Geschwindigkeit fortsetzen, (§ 3.) eben so als wenn beide Kräfte ihn noch immer verfolgten. Gesetzet, der Stoß daure den dritten Theil einer Sekunde, und während dieser Zeit sei die ganze Kraft K im Stande den Körper M bis in R zu treiben. Die Kraft *k* sei im Stande ihn während der nämlichen Zeit bis in *r* zu treiben, so durchläuft der Körper im dritten Theile einer Sekunde die Diagonallinie MS. Wird er nun sich selbst überlassen, so setzet er seinen Weg mit der angefangenen Geschwindigkeit fort, und durchläuft in einer ganzen Sekunde den Weg MP, welcher dreimal so groß ist, als MS. Er beweget sich also eben auf die Art als im vorigen Falle, da die Kräfte ihn mit fortdaurender Wirkung trieben, die eine mit der Geschwindigkeit MN und die andere mit der Geschwindigkeit M*n*.

Zusatz. I. Wenn demnach ein Körper von zwei Kräften getrieben wird, mit den Geschwindigkeiten und in den

Richtungen MN und M n, so kann man allemal, anstatt beider Kräfte, eine einzige substituiren, deren Richtung und Geschwindigkeit, durch die Diogonallinie MP vorgestellet wird. Und umgekehrt, wenn ein Körper M von einer einzigen Kraft getrieben wird, in der Richtung und mit der Geschwindigkeit MP, so kann man allemal, anstatt derselben, zwei andere Kräfte substituiren, deren Richtungen und Geschwindigkeiten durch die Seiten MN und M n eines Parallelogramms vorgestellet werden, wovon die gegebene Richtung und Geschwindigkeit MP die Diagonallinie ist. In beiden Fällen saget man, die Kraft, welche die Geschwindigkeit MP hervorbringet, sei aus den beiden andern zusammengesetzt, welche die Geschwindigkeiten MN und M n erzeugen. Oder man saget, die erstere dieser Kräfte sei in beide andere zerleget. Der Kürze halben deutet man oft die Kräfte durch die erzeugten Geschwindigkeiten an, und saget z. E. die Kraft MP sei aus den Kräften MN und M n zusammengesezt.

Zusatz II. Das nämliche Gesetz kann auch gelten, wenn zwei fortdaurende Kräfte mit veränderlicher Geschwindigkeit auf einen Körper wirken, wenn nur beide Bewegungen von einerlei Art sind, so daß sich allemal MR zu MN verhalte, wie M r zu M n. In diesem Falle beschreibet der Körper M ebenfalls die Diagonal-Linie MP, und er beschreibet sie mit einer Bewegungsart, welche den beiden ähnlich ist. Z. E. lasset uns annehmen, daß beide Kräfte so wirken, daß die durchlaufenen Wege sich allemal verhalten wie die Quadrat-Zahlen der Zeiten. So verhält sich MR zu MN wie $(\frac{1}{3})^2$ zu 1^2 oder wie $\frac{1}{9}$ zu 1, wenn wir nämlich die verflossenen Zeiten, wie bei den vorigen Fällen annehmen. Demnach verhält sich auch M r zu M n wie $(\frac{1}{3})^2$ zu 1^2 oder wie $\frac{1}{9}$ zu 1. Also verhält sich MR zu MN wie M r zu M n, oder MR zu M r wie MN zu M n, oder MR zu RS wie MN zu NP, welches wiederum

derum zu erkennen giebt, daß MNP ein geradlinichtes Dreieck ist, und daß die Punkte M, S und P in einer geraden Linie liegen. Ferner, da MS zu MP wie MR zu MN; so ist MS zu MP wie $(\frac{1}{3})^2$ zu 1^2 oder wie $\frac{1}{9}$ zu 1. Also geschiehet die Bewegung in der Diogonal-Linie MP mit der nämlichen Bedingung, daß die durchlaufenen Räume sich verhalten wie die Quadrat-Zahlen der Zeiten.

§. 10.

Es wird als ein Gesetz der Bewegung angenommen, daß **Wirkung und Gegenwirkung allemal gleich und in entgegengesezter Richtung sind.** Dieses ist also zu verstehen: Wenn ich irgend einen Körper fortstoße, so gebrauche ich genau so viel Kraft als er Widerstand äußert, und also ist meine Wirkung seiner Gegenwirkung gleich. Ferner ist die Gegenwirkung, der Richtung nach, der Wirkung entgegensetzt. Denn, ich mag den Körper von welcher Seite ich will mit der Hand anstoßen, so empfinde ich jedesmal eine Gegenwirkung oder einen Widerstand, der meine Hand nicht seitwärts, sondern ihrer Richtung gerade zuwider zurükhält.

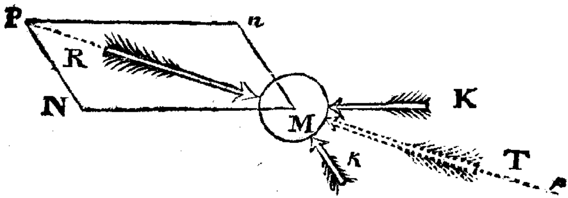
Dieses Gesetz, welches im allgemeinen genommen etwas dunkel scheinet, lässet sich in jedem besonderen Falle am besten begreifen.

§. 11.

Der Zustand des Gleichgewichts hat seine Gesetze eben so gut als die Bewegung. Oder vielmehr sind die Gesetze des Gleichgewichts nichts anders als Folgerungen aus den Gesetzen der Bewegung. Das Hauptgesetz des Gleichgewichts haben wir schon angeführt, nämlich, daß ein **Körper in Gleichgewicht bleibet, wenn zwei gleiche Kräfte auf ihn in entgegengesezter Richtung wir-**

ken (§ 7). Es ist nur ein besonderer Fall des allgemeineren Gesetzes, daß bei entgegengesezten Kräften die Wirkung so groß ist, als wenn sie von einer Kraft herrührte, welche der Differenz beider Kräfte gleich wäre. Nehmen wir nun an, daß beide Kräfte gleich sind, so wird die Differenz null, und es entstehet das Gleichgewicht (§ 8).

§. 12.



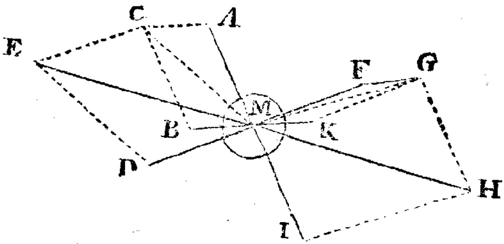
Wenn ein Körper von drei Kräften gereizet wird, wenn dabei eine von diesen dreien derjenigen gleich ist, welche aus den beiden übrigen zusammengesezt ist, und wenn die dritte Kraft eine der zusammengesezten entgegengesezte Richtung hat, so bleibet der Körper zwischen den drei Kräften in Gleichgewicht.

Zum Exempel, der Körper M, werde gereizet von den drei Kräften K, *k* und R. Die Kraft K treibe ihn mit der Geschwindigkeit MN, die Kraft *k* mit der Geschwindigkeit M*n*. Man vollende das Parallelogramm N*n*, und ziehe die Diagonal-Linie MP, so kann man sich vorstellen, der Körper M werde von einer einzigen Kraft T gereizet, die den Körper in der Richtung und mit der Geschwindigkeit MP treibet. Trift es sich nun, daß die Kraft R eben so groß ist, als die zusammengesezte Kraft T, und daß sie in derselbigen gerader Linie P*p*, aber in entgegengesezter Richtung wirket, so daß sie den Körper M mit der Richtung und Geschwindigkeit M*p* = MP für sich allein treiben würde, so ist klar, daß die Kraft R der zusammensammengesezten Kraft T, und folglich beiden Kräften K und k das Gleichgewicht halten muß, und daß folglich auch der Körper M in Gleichgewicht bleibet.

Zusaz. Man saget, daß Linien Kräfte vorstellen, wenn die Linien sich wie die Kräfte verhalten, und die Richtungen derselben ausdrücken. Wenn verschiedene Kräfte auf denselben Körper wirken, so stellen die nämlichen Linien, welche die Geschwindigkeiten ausdrücken, auch die Kräfte vor. Denn bei gleichen Massen, oder bei der nämlichen Masse verhalten sich die Kräfte wie die Geschwindigkeiten. Wenn also zwei Seiten MN und Mn eines Parallelogramms zwei Kräfte vorstellen, die auf den Körper M wirken, so stellet die Diogonal-Linie MP eine dritte Kraft vor, welche entweder aus beiden zusammengesezt ist, oder beiden das Gleichgewicht hält, nachdem man sie in ihrer natürlichen Richtung vom Körper aus, oder in entgegengesezter Richtung nach dem Körper hin nimmt.

§. 13.

Nachdem man zwei Kräfte in eine zusammengesezt hat, so kann man die entstandene wiederum mit einer dritten, die neue mit einer vierten u. s. w. zusammensetzen. Es mögen also so viel Kräfte gegeben sein als man will, die alle auf einen Körper wirken, so lassen sie sich in eine einzige zusammensetzen, welche die nämliche Wirkung thut. Dieses vorausgesezt, so kann der vorige Grundsaz des Gleichgewichts auf folgende Art allgemeiner ausgedrücket werden: **Wenn ein Körper von verschiedenen Kräften gereizet wird, und wenn die zusammengesezte Kraft aus denen die einerseits wirken, der zusammengesezten Kraft aus denen die anderseits wirken, gleich und in gerader Linie entgegengesezt ist, so muß der Körper zwischen allen Kräften in Gleichgewicht bleiben.**



Zum Exempel der Körper M werde von sechs Kräften gereizet, deren Richtungen und Größen durch die Linien MA, MB, MD, MF, MK, MI vorgestellet werden. Mit den Seiten MA und MB vollende man das Parallelogram MACBM, so stellet die Diagonallinie MC eine Kraft vor, welche eben so wirket, als die Kräfte MA und MB. Aus den Seiten MC und MD mache man wiederum das Parallelogram MCEDM und ziehe die Diagonallinie ME, so stellet sie eine Kraft vor, welche eben so wirket, als die Kräfte MD und MC, folglich eben so, wie die drei Kräfte MD, MB und MA. Auf der andern Seite verfahre man auf ähnliche Art, nämlich man seße die Kräfte MF und MK in eine einzige MG zusammen. Diese MG mit MI seße man wiederum in eine einzige MH zusammen, so wird diese Kraft MH die nämliche Wirkung thun, als die beiden Kräfte MI und MG, oder als die drei Kräfte MI, MK und MF. Trift es sich nun, daß beide entstehende Kräfte, ME einerseits, und MH anderseits, einander gleich, und in derselbigen geraden Linie entgegengesetzet sind, so ist klar, daß sie einander aufheben, und den Körper M in Gleichgewicht halten. Da sie aber die Stellen der sechs Kräfte vertreten, so müssen auch diese sechs den Körper M in Gleichgewicht halten.

Der nämliche Beweis läßt sich ebenfalls bei mehreren oder wenigeren Kräften anwenden.

§. 14.

§. 14.

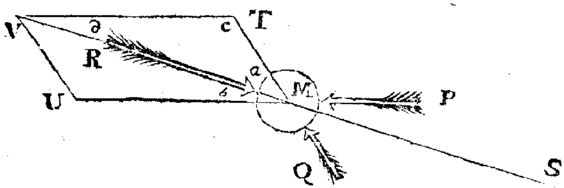
Wenn drei Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so müssen ihre Richtungen in einen einzigen Punkt zusammen laufen, und diese Richtungen müssen in einer und derselben Ebene liegen. Daß sie in einem Punkt zusammen laufen müssen, erhellet daraus, daß zwei derselben, wenn sie zusammen gesetzet werden, der dritten das Gleichgewicht halten sollen. Folglich muß die dritte Kraft gegen den Punkt wirken, wo die beiden anderen, oder die aus ihnen entstehende, ihre Wirkung äussern. Jedoch kan auch der Punkt, wo die Richtungen zusammentreffen, in einer unendlichen Entfernung liegend angenommen werden, und alsdann sind die Richtungen parallel.

Auch müssen die drei Richtungen in einer und derselben Ebene liegen. Denn, die aus zwei Kräften zusammengesezte Kraft, hat ihre Richtung nothwendig in derselben Ebene, wie die beiden einzelnen; weil die Seiten und die Diagonallinie eines Parallelograms nothwendig in derselben Ebene liegen. Da nun die dritte Kraft dieser zusammengesezten gerade entgegengesezt sein muß, so lieget ihre Richtung in der Verlängerung der Diagonallinie, und folglich mit ihr in derselben Ebene wo die beiden übrigen Richtungen liegen.

§. 15.

Wenn drei Kräfte in Gleichgewicht sind, so verhalten sich jede zwei, umgekehrt wie der Sinusse der Winkel die sie mit der dritten machen.

(Siehe die folgende Figur.)



Gesezet die Kräfte P, Q, R, welche durch die Geschwindigkeiten MU, MT, MS, vorgestellet werden, halten einander oder den Körper M in Gleichgewicht, so muß die Geschwindigkeit MS, der Diagonallinie MV des Parallelograms TU gleich sein, und folglich wird die Kraft R auch durch MV vorgestellet. Es verhält sich also P zu Q wie MU zu MT, oder wie TV zu MT. Nun verhalten sich im Dreiecke MTV, wie überhaupt in jedem Dreiecke, die Seiten wie die Sinusse der gegenüber liegenden Winkel. Folglich ist TV zu MT wie Sa zu Sd. Es ist aber der Winkel b seinem Wechselwinkel d gleich. Also ist TV zu MT wie Sa zu Sb. Folglich ist auch die Kraft P zur Kraft Q wie Sa zu Sb. Es ist aber der Winkel a derjenige, welchen die Kraft Q oder MT mit der dritten Kraft R oder MV bildet. Desgleichen ist der Winkel b derjenige, welchen die Kraft P oder MU mit der dritten Kraft R oder MV bildet. Folglich verhalten sich wirklich die Kräfte P und Q umgekehrt wie die Winkel welche sie mit der dritten Kraft R bilden.

Die Kraft P verhält sich zur Kraft R wie MU zu MV, oder wie TV zu MV, folglich wie der Sinus des $\angle a$ zum Sinus des $\angle c$. Es ist aber der Sinus des Winkels c eben so groß als der Sinus der Summe beider Winkel $a + d$, weil diese Summe das Supplement des Winkels c ist. Da nun der Winkel b den Winkel d gleich ist, so ist $a + b = a + d$. Folglich ist der Sinus des Winkels

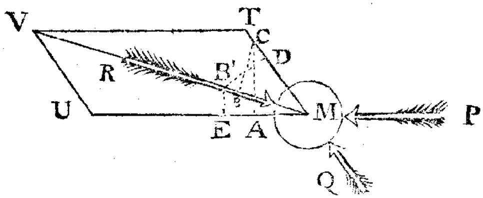
kels c dem Sinus des Winkels $(a + b)$ gleich. Also verhält sich TV zu MV wie der Sinus des Winkels a zum Sinus des Winkels $(a + b)$ oder wie der Sinus des Winkels TMV zum Sinus des Winkels TMU. Folglich verhält sich auch die Kraft P zur Kraft R, wie der Sinus des Winkels TMV zum Sinus des Winkels TMU. Es ist aber TMV der Winkel, welchen die Kraft R oder MV mit der dritten Kraft Q oder MT bildet. Der Winkel TMU ist derjenige, welchen die Kraft P oder MU mit der dritten Kraft Q oder MT bildet. Also verhalten sich die Kräfte P und R umgekehrt wie die Sinusse der Winkel, die sie mit der dritten Kraft Q bilden.

Die Kraft Q verhält sich zur Kraft R wie MT zu MV, folglich wie der Sinus des Winkels d zum Sinus des Winkels c, oder wie der Sinus des Winkels d zum Sinus des Winkels $d + a$, oder wie der Sinus des Winkels b zum Sinus des Winkels $b + a$, oder wie der Sinus des Winkels, welchen die Kraft R mit der dritten Kraft P bildet, zum Sinus des Winkels, welchen die Kraft Q mit der dritten Kraft P bildet. Wir haben den Winkel TMV für denjenigen angenommen, welchen die Kraft Q oder MT mit der Kraft R oder MV bildet. Eigentlich ist es aber der stumpfe Winkel QMR. Da aber dieser ein Supplement des andern ist, so hat er den nämlichen Sinus, und die angeführten Proporzionen behalten ihre Richtigkeit. Eben so hat der Winkel PMR oder PMV, mit VMU oder MVT einerlei Sinus.

§. 16.

Aus dem vorigen Lehrsatze folget unmittelbar dieser andere: **Wenn man aus einem beliebigen Punkte in der (nöthigenfalls verlängerten) Richtungs-Linie einer von den drei Kräften, die einander das Gleichgewicht halten, auf die beiden anderen Rich-**

tungen senkrechte Linien fallen läßt, so verhalten sich diese beiden anderen Kräfte umgekehrt, wie gedachte senkrechte Linien. Oder kürzer, wenn drei Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so verhalten sich jede zwei derselben, umgekehrt wie die senkrechten Linien, welche aus einem beliebigen Punkte in der dritten Richtung auf ihre eigenen Richtungen fallen.



Es seien die drei Kräfte P, Q und R, welche durch die Linien MU, MT und MV vorgestellet werden, in Gleichgewicht; so verhalten sich, wie schon bewiesen worden, die Kräfte P und Q gegen einander umgekehrt, wie die Sinusse der Winkel UMV und TMV, welche sie mit der dritten Kraft bilden. In der Richtung MV dieser dritten Kraft nehme man den beliebigen Punkt B', und fälle die Linien B'D und B'E auf die beiden übrigen Richtungen senkrecht. Wird nun MB' zum Halbmesser genommen, so ist B'D der Sinus des Winkels B'MD oder VMT, und B'E ist der Sinus des Winkels B'ME oder VMU. Also verhalten sich die senkrechten Linien B'D und B'E wie die Sinusse der Winkel VMT und VMU, folglich umgekehrt wie die Kräfte P und Q.

In der Richtung MT nehme man wiederum den beliebigen Punkt C, und fälle CB senkrecht auf MV, und CA senkrecht auf MU. Nimmt man MC zum Halbmesser, so ist CB der Sinus des Winkels CMB oder TMV, und CA ist der Sinus des Winkels CMA oder TMU.

Folg:

Folglich verhält sich CB zu CA wie der Sinus des Winkels TMV zum Sinus des Winkels TMU. Folglich verhält sich CB zu CA umgekehrt, wie die Kraft R zur Kraft P, oder gerade wie die Kraft P zur Kraft R. Eben so würde der Beweis ausfallen, wenn man den willkührlichen Punkt in der Richtung MU genommen hätte. Man könnte ebenfalls die Punkte B′ und C außerhalb des Parallelogramms TU in den Verlängerungen der Linien MV und MT nehmen. Der Beweis bleibt der nämliche.

§. 17.

Da nun P, Q :: B′D, B′E, so folget, daß $P \times B'E = Q \times B'D$. Desgleichen da P, R :: CB, CA, so ist $P \times CA = R \times CB$. Das heißt: das Produkt aus einer Kraft und der auf deren Richtung gefällten senkrechten Linie ist dem Produkte aus der andern Kraft und der zustimmenden senkrechten Linie allemal gleich, wenn nämlich beide senkrechten Linien aus einem Punkte in der Richtung der dritten Kraft entspringen, welche dritte den beiden vorigen das Gleichgewicht hält. Und hieraus kann man umgekehrt schließen, daß drei Kräfte einander das Gleichgewicht halten, wenn man aus der Richtung der einen auf die Richtungen der beiden übrigen senkrechte Linien fället, und findet, daß jede senkrechte Linie, wenn man sie mit der Kraft multipliziret, auf deren Richtung sie senkrecht ist, ein gleiches Produkt giebet.

§. 18.

Zu den Gesetzen des Gleichgewichtes können noch einige Erfahrungen und Grundsätze gerechnet werden, welche sich insbesondere auf die Schwere der Körper beziehen. Es sind folgende, womit wir dieses Hauptstück beschliessen wollen.

§. 19.

Jeder schwere Körper kann als ein einzelner Punkt betrachtet werden, welcher die ganze Wirkung der Schwere in sich faßt. Denn wir haben schon gesehen, daß vermöge der Erfahrung in jedem Körper ein Schwerpunkt vorhanden ist, welcher gleichsam den Druck der ganzen Masse ausübet. Wenn also ein schwerer Körper als ein bloßer schwerer Punkt betrachtet wird, so ist dieses eigentlich von dem in ihm befindlichen Schwerpunkte zu verstehen.

§. 20.

Die Schwere eines und desselbigen Körpers, oder gleicher Massen, ist beständig einerlei, so wohl in allen Zeiten, als auch in allen Gegenden der Erde. Wir haben keine Ursache zu vermuthen, daß die nämliche Masse zu einer Zeit schwerer sein sollte, als zur andern. Und sollte auch hierinn eine Veränderung statt finden, die allenfalls aus der anziehenden Kraft des Mondes und anderer himmlischer Körper herrühren könnte, so ist sie doch gewiß so unmerklich, daß es eine übertriebene Genauigkeit wäre, dieselbe in Anschlag zu bringen.

Was die verschiedenen Höhen betrift, so ist es zwar ausgemacht, daß die Schwere der Körper abnimmt, wenn man sich von der Erdfläche entfernet, und zum Beispiel auf hohe Berge steiget. Hingegen in mittelmäßigen Höhen, als auf hohen Häusern oder Thürmen, ist die Abnahme der Schwere noch ganz unmerklich. Sie brauchet folglich nicht bei den gewöhnlichen Fällen in Anschlag genommen zu werden. Wenn es bloß auf die Vergleichung der Schweren ankömmt, so hat die Höhe keinen Einfluß darauf. Denn wenn zum Exempel ein Körper unten auf der Erde ein Pfund wieget, und er wird auf dem höchsten Berge mit dem nämlichen Gewichte abgewogen, so wird

er

er auch dort ein Pfund wiegen, weil die Masse des Gewichts auf dem Berge eben so viel an Schwere verlieret, als der andere Körper.

Was die verschiedenen Gegenden der Erde betrift, so ist es ebenfalls ausgemacht, daß die Gegenden um den Aequator herum etwas weiter vom Mittelpunkte der Erde entfernet sind, als die nördlicheren Gegenden, und daß folglich gedachte mittägliche Länder unter der Linie gleichsam einen Berg bilden, auf welchem die Schwere der Körper etwas geringer ist. Hingegen in einem und demselben Lande ist auch dieser Unterschied so klein, daß er billig aus der Acht gelassen werden kann. Was die Vergleichung der Gewichte betrift, so gilt hier die nämliche Anmerkung, welche kurz vorher von den Bergen gemacht worden.

§. 21.

Wenn zwei Körper, in einer mittelmäßigen Entfernung von einander, frei herunter fallen, so beschreiben sie geraden Linien, welche als parallel angesehen werden können. Da die Richtungen fallender Körper auf der Erdfläche senkrecht sind, und da diese Fläche beinahe kugelrund ist, so treffen solche Richtungen, wenn man sie in Gedanken verlängert, im Mittelpunkte der Erde, oder nahe bei demselben zusammen, wo sie allemal einen Winkel bilden. Diese Richtungen sind demnach als verlängerte Halbmesser der Erde zu betrachten. Da aber die Erdkugel sehr groß ist, so kann man einen kleinen Theil ihrer Fläche als eine Ebene, und die Richtungen der fallenden Körper als gerade Linien betrachten, die auf solcher Ebene senkrecht, und folglich mit einander parallel sind.

Zusatz. Hierauf ist der Unterschied gegründet, welchen wir zwischen **vertikalen** und **horizontalen** Linien oder Ebenen machen. Jede Linie oder Ebene, welche in der Richtung eines fallenden Körpers steht, wird vertikal oder **lothrecht** genannt. Jede Linie oder Fläche hingegen, welche mit einer lothrechten Linie rechte Winkel machet, und folglich mit der eingebildeten Ebene der Erdfläche parallel ist, wird horizontal oder **wagerecht** genannt.

§. 22.

Wenn ein Körper vermittelst eines Strickes, eines Fadens, oder einer geraden Stange aufgehänget ist, so begiebt er sich in eine solche Lage, daß das Strick, der Faden, oder die Stange eine vertikale Lage bekomme. Denn, da die Fallkraft ihn antreibet, sich so viel als möglich der Erde zu nähern, so muß er sich in die gedachte Lage begeben, in welcher er wirklich niedriger oder der Erde näher ist, als in jeder anderen Lage.

Hierauf gründet sich der Gebrauch des **Bleiloths**, welches die vertikale Linie zu erkennen giebt. Denn das an einem Faden hängende Stück Blei ziehet allemal den Faden in einer vertikalen Linie herunter.

§. 23.

Wenn zwei oder mehrere Körper an Fäden oder Stangen herunter hängen, und sonst kein Hinderniß vorhanden ist, so begeben sich die Fäden oder Stangen in solche Lage, daß sie für parallel gehalten werden können. Denn, da sie vertikal sind, so können sie in mittelmäßigen Entfernungen für parallel gehalten werden, eben so wie die Richtungen fallender Körper.

§. 24.

Wenn ein Gewicht an einem Faden oder an einer Stange herunter hänget, so ziehet es mit glei-

gleicher Kraft, es mag in welchem Punkte man will an dem Faden oder der Stange angebracht sein. Denn der kleine Unterschied in der Höhe, wo das Gewicht befestiget wird, kann zur Verminderung der Schwere desselben nichts merkliches beitragen. Das Gewicht sammt der Stange oder dem Stricke ist als eine einzelne Masse zu betrachten, welche allemal einerlei Schwere behält.

Wenn der Faden oder die Stange in Betrachtung des Gewichts eine unmerkliche Masse hat, oder bloß als eine gerade Linie angesehen wird, so kann man auch sagen, das Gewicht ziehe allemal mit gleicher Kraft, es sei der Faden oder die Stange, lang oder kurz.

Diesen Grundsatz pfleget man auch also auszudrücken: **Ein Gewicht ziehet mit gleicher Kraft in allen Punkten seiner Richtung.**

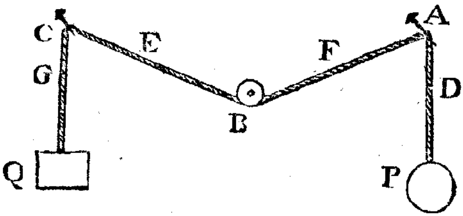
Auch von jeder Macht, die vermittelst eines Strickes oder einer Stange einen Körper ziehet oder stößt, kann gesaget werden, daß sie in allen Punkten ihrer Richtung mit gleicher Kraft wirket, wenn man die Masse des Strickes oder der Stange aus der Acht läßt. Denn der größere Widerstand könnte nur daher rühren, daß die Masse des Bewegbaren um die Masse des Strickes oder der Stange vergrößert würde. Da aber diese Vergrößerung für nichts geachtet wird, so bleibet die Masse unverändert. Zugleich bleibet auch die Geschwindigkeit unverändert, indem die Macht den Körper weder langsamer noch geschwinder fortbringen kann sie mag ihn entweder unmittelbar oder durch eine steife oder biegsame Linie berühren. Da also weder Masse noch Geschwindigkeit des Bewegbaren verändert werden, so bleibet auch die erforderliche Kraft unverändert, indem die Größe der Kraft durch diese Masse und Geschwindigkeit bestimmet wird (Hauptst. II § 30).

Wenn

§. 25.

Wenn eine Macht einen Körper vermittelst eines Fadens ziehet, welcher über einen Nagel oder auch über eine befestigte Rolle, auch wohl über mehrere Nägel oder Rollen geleget ist, so können diese Nägel oder Rollen den Widerstand nicht vermehren noch vermindern, sondern die Kraft wirket eben so auf den Körper, als wenn sie ihn unmittelbar berührte, und als wenn sie die Richtung desjenigen Theiles des Fadens hätte, welcher unmittelbar am Körper befestiget ist. Auch ist es gleich viel, in welchem Punkte des Fadens man die Kraft anbringe. Denn in diesen Fällen wird weder die Masse noch die Geschwindigkeit des Körpers, folglich auch nicht die Wirkung der Kraft verändert (II Hauptst. § 30). Nur wird hierbei vorausgesetzet, daß der Faden eine bloße biegsame Linie, ohne alle Schwere ist; auch wird angenommen, daß weder dieser Faden am Nagel, noch die Rolle an ihrer Axe die geringste Reibung leidet, sondern daß alles vollkommen glatt und beweglich ist.

Was hier von jeder Kraft gesaget wird, kann auch von einem Gewichte verstanden werden, weil jedes aufgehängte Gewicht, wie eine wirkliche Kraft, ziehet.



Es sei P eine Macht, welche den Körper Q vermittelst eines Fadens ziehet, der über den Nagel A, die Rolle B, und den Nagel C gehet, so wirket demnach die Macht P in ihrer jetzigen Richtung AP eben so, als wenn sie unmittelbar den Körper Q berührte, und in der Richtung QC zöge, oder als wenn sie bei G in der Richtung GC, oder bei E in der Richtung EB, oder bei F in der Richtung FA, oder bei D in der Richtung DP wirkete, das Gewicht des Fadens und die Reibung allemal abgerechnet.

Ist P selbst ein Gewicht, so wirket es ebenfalls, als wenn es das Gewicht Q nach der Richtung QC gerade hinauf zöge.

Man siehet hieraus, wie bequem Stricke, Seile oder Fäden sind, um die Wirkung jeder Kraft, nach jeder beliebigen Richtung fortzusetzen. In der Praxis läßt man den Faden, wegen der geringeren Reibung, allemal lieber über Rollen als über Nägel laufen.

Viertes Hauptstück.

Von dem Hebel und der Wage.

§. 1.

Eine Maschine oder ein Hebezeug ist ein jeder Körper, der dazu eingerichtet und bestimmet ist, um die Wirkung einer Kraft bis auf einen beliebigen Widerstand fortzupflanzen. Die Maschinen werden eingetheilet in einfache und zusammengesezte. Eine Maschine wird einfach genannt, wenn sie nur aus einem einzigen Stücke bestehet, oder wenn sie aus zwei oder mehreren Stücken bestehet, wovon jedoch das eine ohne das andere als Maschine keinen Dienst leisten kann. Eine zusammengesezte Maschine ist eine jede, die aus mehreren einfachen bestehet. Unter den einfachen Maschinen hat keine einen so ausgedehnten Nutzen, als der Hebel oder der Hebebaum, dem wir deswegen dies ganze Hauptstück widmen wollen. Die Wage gehöret mit zur Theorie des Hebels.

§. 2.

Der Hebel oder Hebebaum ist eine Stange, welche man auf irgend einem unbeweglichen, wenig Raum einnehmenden Körper stützet, und an welcher man sowohl eine Last anbringet, als auch eine Kraft, welche die Last heben soll. Jezt betrachten wir den Hebel bloß als eine steife Linie, welche in einem ihrer Punkte unterstützet ist, und vermittelst welcher zwei Kräfte, oder eine Kraft und ein Widerstand, oder zwei Gewichte, einander das Gleichgewicht halten sollen.

Es

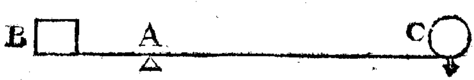
Es sind demnach bei jedem Hebel drei Punkte zu merken, nämlich 1) der **unterstützte Punkt**, oder **Ruhe-Punkt**, welcher meistens durch ein Dreieck (△) angedeutet wird. 2) Der Punkt wo die Resistenz oder eine von beiden Kräften angebracht wird, und bei welchem man ein Viereck (□) zu zeichnen pfleget. 3) der Punkt wo die andere Kraft angebracht wird, welche der ersteren entgegen arbeitet, und welchen man mit einem Zirkel (○) zu bezeichnen pfleget. Wir wollen nöthigenfalls diesem Zirkel noch einen kleinen Pfeil beifügen, um die Richtung der Kraft anzudeuten (♂).

Man pfleget überhaupt bei der Lehre von dem Hebel die eine Macht bloß **Kraft** oder **Hebekraft** zu nennen, die andere **Resistenz** oder **Widerstand**, obgleich im Grunde jede beider Mächte mit ihrer eigenthümlichen Kraft wirket, und zugleich der andern widerstehet. Bei der wirklichen Anwendung des Hebels ist die Macht, die man als Widerstand betrachtet, gewöhnlicher Weise ein schwerer Körper; und diejenige, welche man eigentlich als Kraft oder als eine wirkende Ursache betrachtet, ist meistens ein Mensch, der mit seinen Händen den Hebel entweder niederdrücket oder aufwärts ziehet.

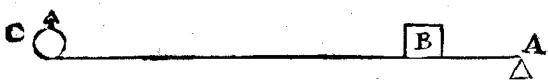
§. 3.

Der Hebel wird auf dreierlei Art gebrauchet.

1) Als **Druck-Hebel**, wenn der Ruhepunkt sich zwischen der Resistenz und der Kraft befindet, wie in folgender Figur, wo der Ruhepunkt A zwischen der Resistenz B und der Kraft C lieget.



2) Als Trag-Hebel, wo die Resistenz B zwischen dem Ruhepunkte A und der Kraft C lieget.



3) Der Wurf-Hebel, wo die Kraft C zwischen dem Ruhepunkt A und der Resistenz B befindlich ist. Bei diesem Hebel muß die Lage der Stütze bei dem Ruhepunkte umgekehrt werden.

Bei allen diesen Hebeln nennet man Arme des Hebels diejenige Theile desselben, welche zwischen dem Ruhepunkte und der Kraft oder Resistenz befindlich sind. Also ist in den drei vorhergehenden Figuren allemal AB der eine, und AC ist der andere Arm.

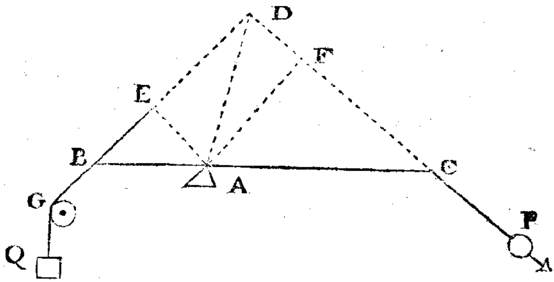
Alle diese Hebel sind den nämlichen Gesetzen unterworfen. Man kann jeden Hebel überhaupt als eine gerade Linie betrachten, an welcher drei Mächte angebracht sind, welche einander das Gleichgewicht halten. Denn die Stütze selbst ist eine Macht, welche den beiden übrigen das Gleichgewicht hält. Der gewöhnlichste Fall beim Hebel ist zwar, daß die Mächte in vertikalen und folglich parallelen Richtungen wirken. Jedoch ist dieser Fall nicht der einzige, und die anzugebenden Regeln müssen allgemein sein.

§. 4.

Bei jedem Hebel, wenn das Gleichgewicht Statt findet, verhält sich die Kraft zur Last oder Resi-

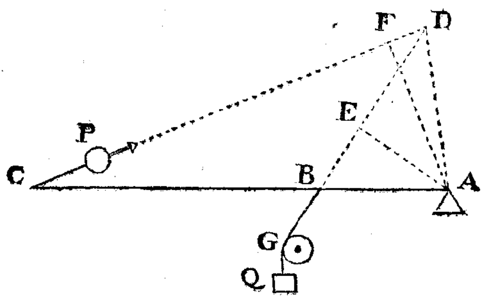
Resistenz, umgekehrt wie die senkrechten Linien, welche aus dem Ruhepunkte auf die Richtungslinien der Kraft und der Resistenz gefället werden.

Lasset uns erstlich den Druckhebel betrachten.



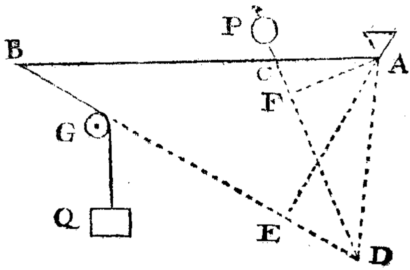
Es ist CB ein Druck-Hebel. Der Ruhepunkt ist in A. Die Resistenz Q wirket in der Richtung BG, als wenn sie in B selbst angebracht wäre, indem die Faden BGQ über die Rolle G gelegt ist. (III. H. § 25.) In C wirket die Kraft P, nach der Richtung CP. Man verlängere die Richtungslinien GB, und PC bis sie einander in D schneiden; und sie müssen wirklich einander schneiden, indem sie in einer Ebene liegen müssen (III. H. §. 14). Anstatt der bloßen Linie CB stelle man sich ein Dreieck CDB ohne Schwere vor. So wirket die Resistenz Q gleich stark in allen Punkten ihrer Richtung BG, oder DG. (III H. § 24) Folglich kann man sich vorstellen, der Faden BG sei bis in D verlängert, und in D am Scheitel des Dreiecks befestiget. Eben so verlängere man in Gedanken den Faden PC, und befestige ihn ebenfalls in D. So hat man zwei Kräfte Q und P, welche in den Richtungen DG und DP auf den Punkt D wirken. Ferner muß man sich die Stütze A als eine dritte Kraft vorstellen, welche den beiden vorigen das Gleichgewicht halten soll. Die Richtung dieser Kraft muß demnach ebenfalls durch den Punkt D gehen, (III. H. § 14.) das heißt, die Stütze A muß in der Richtung AD gegenwirken oder widerstehen. Nun wissen wir, daß, wenn drei Kräfte einander das Gleichgewicht halten, jede zwei derselben sich umgekehrt verhalten müssen, wie die senkrechten Linien, welche aus einem Punkte der dritten Richtung auf deren Richtungen gefället werden. (III. H. § 16.) Nehmen wir also den Punkt A selbst in der Richtung AD, so muß sich die Kraft P zur Kraft Q verhalten, wie die senkrechte Linie AE zur senkrechten Linie AF.

Das nämliche gilt vom Tragehebel.



Weil hier die drei Kräfte P, Q und A einander das Gleichgewicht halten sollen, so müssen ihre Richtungen CD, GD und AD in einen Punkt D zusammen laufen, und es muß sich die Kraft P zur Kraft Q verhalten, wie die senkrechte Linie AE zur senkrechten AF. Die nämliche Bewandniß hat es auch mit dem Wurfhebel.

Die

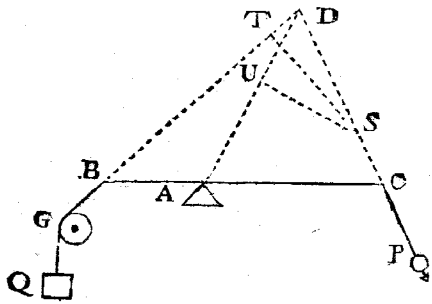


Die Resistenz Q ziehet in der Richtung BG oder BD, die Kraft P in der Richtung CP oder DP. Da beide Richtungen in D zusammen treffen, so muß auch die Stütze A in der Richtung AD widerstehen.

Auch müssen sich die Kräfte P und Q verhalten, wie sich die senkrechte AE verhält zur senkrechten AF.

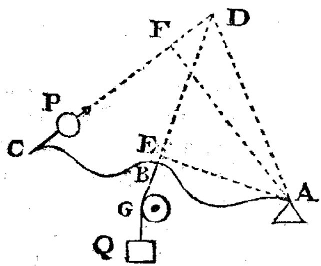
Anmerkung I. Die Lage des Punktes D wird durch die Richtungen der Kraft und der Resistenz bestimmet, und alsdann richtet die Stütze ihre Wirkung oder ihren Widerstand nach demselbigen Punkte D hin, um das Gleichgewicht zu halten.

Anmerkung II. Wenn man den Widerstand bestimmen will, welchen die Stütze zu leisten hat, so nehme man einen willkührlichen Punkt in der Richtung einer der beiden übrigen Mächte, und fälle senkrechte Linien daraus, auf die beiden anderen Richtungen, so werden sich diese senkrechten Linien umgekehrt verhalten, wie die Mächte auf deren Richtungen sie fallen, und da der Widerstand der Stütze jezt eine von diesen beiden Mächten ist, so wird derselbe dadurch bestimmet.



Wir wollen nur den Druckhebel zum Beispiel anführen. Man nehme den Punkt S in der Richtung DC der Kraft P, und fälle ST und SU senkrecht auf die Richtungen BD und AD, so verhält sich SU zu ST wie die Macht Q zur Macht A, das heißt, zum Widerstand welchen die Stütze zu leisten hat.

Anmerkung III.) Obgleich wir angenommen haben, daß der Hebel gerade ist, so gelten doch die nämlichen Verhältnisse, wenn er auch eine andere Gestalt hat, denn der Beweiß ist allgemein und ohne Ausnahme.

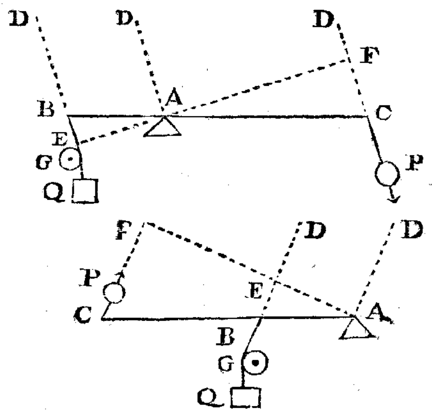


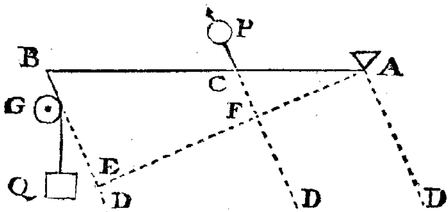
Wir

Wir wollen einen krummen Trag-Hebel ABC zum Beispiele nehmen. Die Kraft P wirket in der Richtung CD, die Resistenz Q in der Richtung BG oder DG, folglich die Stütze A in der Richtung AD. Also müssen sich die Mächte P und Q gegeneinander verhalten, wie die senkrechte AE zur senkrechten AF.

§. 5.

Wenn die Kraft und die Resistenz in parallelen Richtungen wirken, so befindet sich der Punkt D in einer unendlichen Entfernung, der Widerstand der Stütze ist alsdann auch mit den beiden übrigen Kräften parallel gerichtet. Die senkrechten Linien AE und AF fallen in eine gerade Linie zusammen, und sie verhalten sich, wenn der Hebel gerade ist, wie die Arme des Hebels. In diesem Falle, nämlich wenn Resistenz und Kraft parallele Richtungen haben, verhalten sich beide gegen einander umgekehrt, wie die Arme des Hebels, an deren Enden sie angebracht sind.

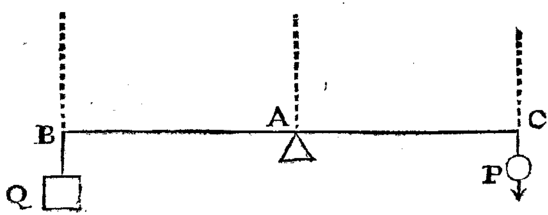




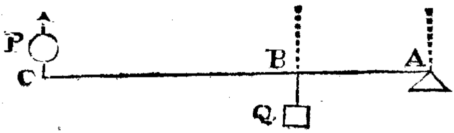
In den drei beigefügten Figuren sind die Richtungen parallel; die senkrechten, aus dem Ruhepunkte gezogenen Linien AE und AF fallen in eine gerade Linie zusammen. Es verhält sich P zu Q wie AE zu AF. Die Dreiecke ABE, und ACF sind in allen drei Figuren ähnlich. Folglich verhält sich AE zu AF wie AB zu AC. Also verhält sich P zu Q wie AB zu AC, das heißt, Kraft und Resistenz verhalten sich umgekehrt wie die zustimmenden Arme des Hebels, oder umgekehrt wie ihre Entfernung vom Ruhepunkte, wenn man nämlich diese Entfernungen von den Punkten B und C rechnet, wo sie angebracht sind.

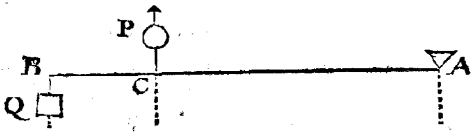
§. 6.

Sind die Richtungen nicht nur parallel, sondern auch gegen die Linie des Hebels senkrecht, so fällt AE auf AB, und AF auf AC; Kraft und Resistenz verhalten sich alsdann wiederum umgekehrt wie die zugehörigen Arme des Hebels.



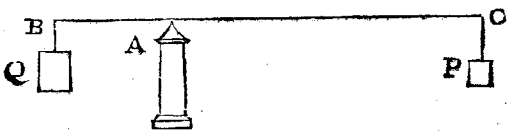
In

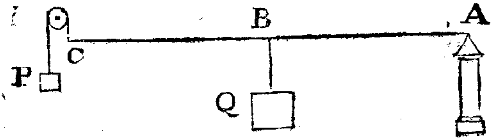




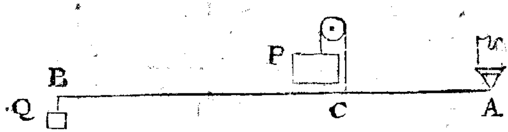
In den drei beigefügten Figuren verhält sich demnach die Hebekraft P zur Resistenz Q, wie sich AB verhält zu AC.

Anmerkung I) Dieser letzte Fall ist derjenige, welcher eintrift, wenn man anstatt beider Kräfte bloße Gewichte anbringet. Sollen sie in Gleichgewicht sein, so müssen sie sich umgekehrt verhalten, wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkte, wie noch aus folgenden Figuren zu ersehen ist, in welchen angenommen wird, daß P sich zu Q verhält, wie AB zu AC. Wo es nöthig ist, sind Rollen angebracht, welche nur die Richtung, aber nicht die Kraft des Gewichts verändern. (III Hauptst. § 25)

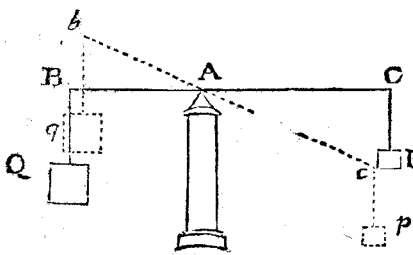




Anmer-



Anmerkung II) Das eben angeführte Verhältniß der Gewichte findet nicht nur statt, wenn der Hebel in einer horizontalen Lage ist, sondern auch in jeder andern Lage. Denn in dem Falle des nicht horizontalen Hebels sind dennoch die Richtungen, nach welchen die Gewichte ziehen, mit einander parallel, und folglich müssen sie sich umgekehrt verhalten, wie die Arme des Hebels. Hieraus muß man schließen: wenn zwei Gewichte an einem Hebel in Gleichgewicht sind, so werden sie in Gleichgewicht bleiben, so lange nur die Richtung ihrer Wirkung vertikal bleibet. Dieses findet vorzüglich bei dem Druckhebel statt, wobei die Gewichte frei herunter hängen können. Hingegen bei den andern Hebeln, wo das eine Gewicht über eine befestigte Rolle gehet, würde sich die Richtung des Fadens bei veränderter Lage des Hebels auch verändern. Es müßte also jedesmal, wenn die Lage des Hebels verändert wird, die Rolle auch verschoben werden. Folgend Figur



stellet

stellet einen Druckhebel vor, wo die Gewichte P und Q sich verhalten wie AB zu AC, und folglich in Gleichgewicht sind. Gesetzt, man drehe den Hebel um seinen Ruhepunkt A herum, so daß er die Lage *cb* erhalte, indem das Gewicht Q in *q* und P in *p* zu hängen kömmt, so wird auch in dieser Lage das Gleichgewicht statt finden. Denn da *p* und *q* in parallelen Richtungen *pc* und *qb* wirken, und sich umgekehrt verhalten wie die Arme A*c* und A*b*, so sind *p* und *q* in Gleichgewicht. (§ 5.)

§. 7.

Aufgabe.

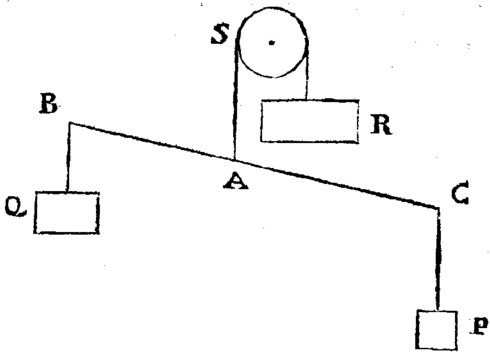
Wenn zwei Gewichte oder andere Kräfte an zwei Punkten eines Hebels angebracht sind, so soll man eine dritte Kraft finden, welche beiden das Gleichgewicht halte, wie auch den Punkt wo diese dritte Kraft angebracht werden muß.

Dieses ist eine allgemeine Aufgabe, welche alle mögliche Fälle begreifet, die bei den dreierlei Hebeln statt finden können.

Man kann überhaupt vier Fälle unterscheiden. Denn es sind die Richtungen entweder parallel oder schief gegen einander. Ferner sind beide Kräfte entweder alle beide wirkend, oder die eine ist wirkend und die andere widerstehend.

(Siehe die folgende Figur.)

Erster



Erster Fall. Es seien die Richtungen PC und QB parallel, und beide Kräfte seien wirkend, so daß sie beide in einerlei Richtung ziehen. Es soll ihnen eine dritte Kraft R entgegengesezt werden, welche beiden das Gleichgewicht halte. So ist erstlich klar, daß die Kraft R so groß sein muß, als beide P und Q zusammengenommen, das heißt $R = P + Q$, weil R allein den ganzen Hebel sammt den daran hängenden Gewichten oder Kräften tragen soll, und der Hebel selbst sammt den Fäden ohne Gewicht ist. Es bleibet also nur der Punkt A zu bestimmen, wo die Kraft R angebracht werden soll. Wir wissen schon, daß

$$P,\ Q.\ ::\ AB,\ AC$$

Daher $(P + Q),\ Q\ ::\ (AB + AC),\ AC$

oder $(P + Q),\ Q\ ::\ CB,\ AC$

Aus dieser Proporzion läßt sich die Entfernung AC bestimmen. Nämlich die Summe beider Kräfte P und Q verhält sich zur einen Kraft Q, wie sich die ganze Entfernung CB verhält zur Entfernung AC der andern Kraft P vom Ruhepunkte oder Gleichgewichtspunkte A; wodurch der Punkt A bestimmet wird. Eben so hätte man gefunden $(P + Q),\ P\ ::\ CB,\ AB$

Wel-

Welche Proporzion ebenfalls den Punkt A bestimmet. Anstatt der Kraft R kann auch unter dem Punkte A eine Stüze angebracht werden, welches den gewöhnlichen Druckhebel giebt.

Zweiter Fall. Gesezt, es sind in voriger Figur gegeben die Kraft P, welche in der Richtung CP wirket, und die Kraft R, welche bei A in entgegengesezter Richtung AS wirket. Es soll die Kraft Q gefunden werden, welche den beiden vorigen das Gleichgewicht hält, wie auch der Punkt B, wo diese Kraft angebracht werden soll, alles mit parallelen Richtungen. Erstlich, da das Gleichgewicht erfordert, daß $R = P + Q$ so folget, daß $Q = R - P$, welches demnach die Grösse der Kraft Q bestimmet. Was den Punkt B betrift, so wird er durch folgende Proporzionen erhalten.

$$Q, P :: AC, AB$$

oder $(R - P), P :: AC, AB.$

Anstatt der Kraft Q kann man in B eine Stüze anbringen, welche den Traghebel oder den Wurfhebel giebt.

Dritter Fall. Es seien gegeben in folgender Figur die Kräfte P und Q, welche zusammen nach den schiefen Richtungen CM und BG wirken, die einander irgendwo in D begegnen. Man nehme auf der einen Richtung, zum Exempel auf der Richtung DG den willkührlichen Punkt I, und sage: $Q, P :: DI, DL$

Durch den Punkt L ziehe man die Linie LN mit DG parallel. Ebenfalls durch den Punkt I ziehe man IN mit DM parallel, so begegnen beide parallele Linien irgendwo in N. Nun ziehe man DN, welche den Hebel CB irgend wo in A schneiden wird, so ist dieser Punkt A derjenige, wo die Kraft R in der Richtung AD oder ND oder AT angebracht werden muß, um den beiden andern das Gleichgewicht

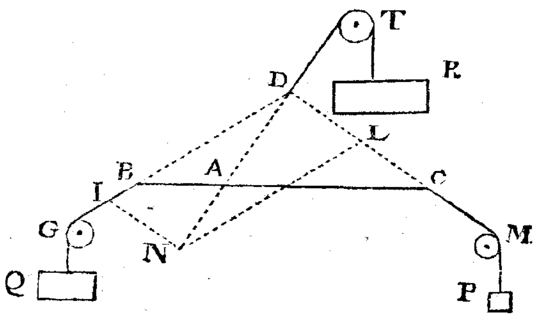
gewicht zu halten. Was die Größe der Kraft R betrift, so sage man

$$DL, DN :: P, R$$

oder $DI, DN :: Q, R$

Jede dieser beiden Proporzionen bestimmet die Größe der Kraft R.

Denn da DI, DL :: Q, P, so stellet die Linie DI, die Kraft Q vor, wie auch ihre Richtung. Desgleichen stellet DL die Größe und Richtung der Kraft P vor. Wird nun das Parallelogramm D I N L D gemacht, so stellet die Diagonallinie DN die Größe und Richtung der Kraft R vor, welche eben so stark wirket als die beiden übrigen, und ihnen das Gleichgewicht hält. Wird der Hebel in A unterwärts gestützet, so vertritt die Stütze die Stelle der Kraft R, und man hat einen gewöhnlichen Druckhebel.



Vierter Fall. Es sey in voriger Figur gegeben die Kraft Q, welche wirkend ist, und die Kraft R, welche gegenwirkend ist, sammt deren Richtungen BG und AT. Es soll die Kraft P nebst deren Richtung CM bestimmet

met werden, welche beiden vorigen das Gleichgewicht halte. Man verlängere beide gegebene Richtungen, bis sie einander in D begegnen. Man nehme wiederum willkührlich die Länge DI auf der Richtung DG, und sage

Q, R :: DI, DN

Die gefundene Größe DN trage man auf DA oder deren Verlängerung. Man ziehe IN, DL mit derselben parallel, und ferner NL mit ID parallel, so hat man das Parallelogramm DINLD, dessen Diagonal-Linie DN eine Kraft vorstellet, welche beiden durch DI und DL vorgestellten Kräften das Gleichgewicht hält. Folglich stellet DL die Größe und Richtung der verlangten Kraft P vor. Da nun DL, oder deren Verlängerung, den Hebel in C trifft, so ist C der Punkt, wo die Kraft P angebracht werden muß, und DM oder CM ist die Richtung derselben. Die Größe der Kraft P bekömmt man durch diese Proporzion

DI, DL :: Q, P

oder DN, DL :: R, P

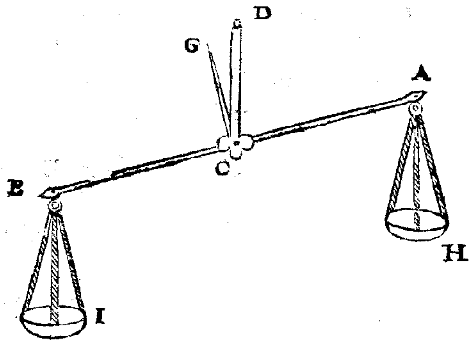
In C kann man, anstatt der Kraft P, eine Stütze anbringen, so hat man einen Traghebel oder Wurfhebel.

§. 8.

Zu den Hebeln müssen die **Wagen** gerechnet werden. Diesen Namen bekömmt jedes Werkzeug, wodurch die Schwere der Körper oder deren Gewicht erforschet wird. Unter allen verschiedenen Arten von Wagen ist diejenige am einfachsten und gebräuchlichsten, welche die **gemeine Wage** genannt wird. Sie bestehet aus folgenden Theilen:

(Siehe die folgende Figur.)

G 1) Ein



1) Ein Wage-Balken AB: dieser ist nichts anders als ein Stab oder eine Stange, welche recht gerade, meistens von einerlei Dicke und einerlei Dichtigkeit ist. Dieser Balken wird bei C in zwei gleiche Theile AC und BC getheilet, welche man die Arme der Wage nennet.

2) Uber die Mitte C des Wagebalkens und auf demselben senkrecht, wird eine Spitze oder Nadel CG errichtet, welche das Zünglein heißt.

3) In der nämlichen Gegend C, unter dem Zünglein, und durch die Mitte des Wagebalkens, gehet ein kleiner Zylinder oder eine Welle durch, welche sowohl auf dem Wagebalken als auch auf dem Zünglein senkrecht stehet.

4) Beide Enden der Welle sind in den Löchern einer Scheere CD beweglich: diese bestehet aus zwei Stäben, welche unterwärts auf beiden Seiten die Welle empfangen, und sich oberwärts in C vereinigen, wo die Scheere noch ferner an einem Ringe hänget, vermittelst

telst dessen die ganze Wage entweder angehänget oder mit der Hand gehalten wird.

5) An beiden Enden A und B des Wagebalkens hängen die Wage-Schalen H und I herunter. Sie sind eine Art von Schüsseln oder Tellern, worauf einerseits der abzuwägende Körper und anderseits die Gewichte geleget werden.

Der Gebrauch dieser Wage ist sehr einfach und sehr bekannt. Wenn nämlich ein Körper in der einen Schale lieget, so werden nach und nach in die andere Schale so viel Pfund, Loth, u. s. f. geleget, bis das Zünglein in der Scheere stehen bleibet, indem die ganze Wage am Ringe hänget. Die eingelegten Gewichte werden gezählet, und bestimmen die Schwere des Körpers.

Der Dienst, welchen das Zünglein hierbei verrichtet, bestehet darin, daß es die horizontale Lage des Wagebalkens anzeiget. Denn da die ganze Wage vermittelst der Welle in der Scheere hänget, so ziehet sie die Scheere herunter, als wenn die ganze Last der Wage in der Welle vereiniget wäre. Die Scheere vertritt demnach hier die Stelle einer Stange, woran eine Last hänget, und leget sich folglich in die vertikale Linie (III H. § 22).

Folglich ist auch das Zünglein vertikal, wenn es in der Scheere stehet; und da das Zünglein auf dem Wagebalken senkrecht stehet, so ist in diesem Falle der Balken horizontal. Sind nun an beiden Enden des horizontalen Balkens gleiche Schweren angebracht, so verhalten sich diese Schweren umgekehrt wie die Arme an denen sie hängen, indem diese auch gleich sind. Denn überhaupt, zwei gleiche Größen verhalten sich, gerade oder umgekehrt, wie zwei andere gleiche Größen. Folglich bleiben beide Schweren in Gleichgewicht (§ 6). Und umgekehrt, wenn beide

Schweren an den gleichen Armen in Gleichgewicht bleiben, so müssen solche Schweren gleich sein, weil sonst das zum Gleichgewicht erforderliche Verhältniß nicht statt finden könnte.

Das angeführte Verhältniß gilt zwar nur eigentlich für den Fall, wo der Balken oder Hebel bloß als eine steife Linie betrachtet wird. Da aber angenommen wird, daß bei der gemeinen Wage sowohl beide Arme, als auch beide Schalen, und die Fäden, woran sie hängen, von gleicher Schwere sind, und alles überhaupt beiderseits von gleicher Beschaffenheit ist, so bleibet die Waage schon für sich selbst in Gleichgewicht, und kann folglich das Gleichgewicht der gleichen Schweren der an beiden Enden aufgelegten Körper nicht stören.

§. 9.

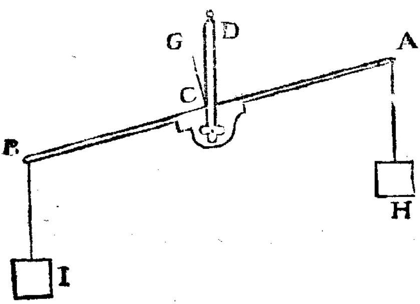
Betrüger verfertigen manchmal falsche Wagen, die so beschaffen sind, daß ein schwereres Gewicht mit einem leichteren Körper in Gleichgewicht bleibet, oder zu bleiben scheinet. Zu diesem Ende machen sie die Arme der Wage von etwas ungleicher Länge, oder sie stellen das Zünglein nicht vollkommen senkrecht auf den Balken, u. s. f. Jedoch läßt sich allemal der Betrug leicht erfahren. Nämlich man leget das Gewogene in die Schale, wo vorher die Gewichte waren, und die Gewichte in die andere Schale. Stehet alsdann das Zünglein wiederum in der Scheere, so ist die Wage richtig, sonst ist sie betrügerisch. Denn, weichet jezt das Zünglein von der vertikalen Lage ab, so siehet man daraus, daß beide Arme, oder die Stricke, oder die Schalen beiderseits nicht gleich schwer sind, und daß das scheinbare Gleichgewicht nur daher rührte, weil dasjenige, was an dem Gewogenen fehlte, durch den längeren Arm, oder auf irgend eine andere Art ersetzet wurde.

§. 10.

§. 10.

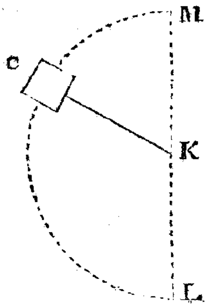
Wenn die Welle ganz genau durch die Mitte oder die Axe des Wage-Balkens gehet, so muß das Gleichgewicht unverändert bleiben, man mag den Balken stellen wie man will. In diesem Falle wird also die Wage keine Schwingungen machen, das heißt, sie wird sich nicht um ihre Welle hin und her drehen bis sie zur Ruhe kömmt, sondern sie wird jedesmal in der Lage bleiben, wie man sie stellet; und folglich, wenn man das Zünglein in die Scheere bringet, so wird sie auch in dieser Lage stehen bleiben, und das Gleichgewicht gleich schwerer Körper anzeigen. Dieses folget aus demjenigen, was von dem Hebel gesaget worden. (§ 6. Anm. II.)

Wird die Welle, oder überhaupt der Ruhepunkt unterhalb derjenigen Linie angebracht, welche der Länge nach durch die Mitte des Balkens gehet, so kann die Waage nur einzig und allein in der horizontalen Lage gleich schwere Körper in Gleichgewicht halten. So bald sie aber aus der horizontalen Lage kömmt, so verlieret sie das Gleichgewicht und wendet sich um.



 Gesetzt

Gesetzt der Mittelpunkt des Wage-Balkens AB sei in C, wo auch das Zünglein CG senkrecht stehet. Es werde aber die Welle etwas unterhalb des Balkens, jedoch in der Richtung GC angebracht, und die Scheere an derselben. In A und B hängen die gleichen Gewichte H und I. Wäre nun der Balken in einer horizontalen Lage, so würde der Punkt C gerade über der Welle zu liegen kommen, und alles in Gleichgewicht halten. Denn der Punkt C trägt gleichsam die ganze Wage, indem er nur unterstützet zu werden brauchet um die Wage in Gleichgewicht zu erhalten. Ist aber dieser Punkt C nicht unterstützet, so kann er nicht in Ruhe bleiben. Dieses ist aber der Fall, wenn die Wage aus ihrer horizontalen Lage kömmt; denn in einer solchen schiefen Lage ist die Welle welche den Punkt C unterstützen sollte, nicht mehr gerade unter demselben, sondern seitwärts. Folglich wird sich der Punkt C um die Welle herumdrehen, bis C unter derselben in der Vertikallinie zu liegen kömmt.

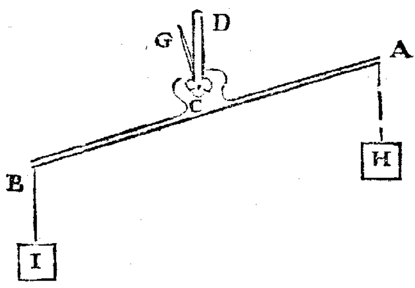


Man stelle sich vor, ein Gewicht C sei an einer steifen Linie CK befestiget, welche sich um den Punkt K herumdrehen kann, so wird dieses Gewicht C, so bald es aus der vertikalen Lage KM kömmt, einen halben Zirkel beschreiben,

ben, bis es den niedrigsten Ort erreichet hat, und in die Lage KL gekommen ist. Anstatt des Gewichtes C setze man den Mittelpunkt der Wage, und K sei die Welle, so wird sie sich ebenfalls umdrehen, bis der Mittelpunkt unterwärts gekommen ist.

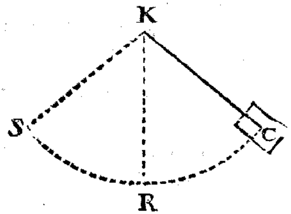
Auf diese Art eingerichtete Wagen werden nicht gebraucht, weil es gar zu schwer ist das Gleichgewicht zu treffen, und weil die allergeringste Erschütterung den Balken umwenden kann. Eben deswegen ist es schwer eine bloße Stange, die man über einen scharfen oder spitzigen Körper leget in Gleichgewicht zu setzen. Die beiden Theile derselben stellen die Arme eines Waagebalkens vor. Der unterstützte Punkt ist aber in diesem Falle nicht in der Axe des Körpers, sondern unterhalb derselben.

Ist die Wage so eingerichtet, daß die Welle oberhalb der Axe des Balkens angebracht ist, wie in folgender Figur,



so wird die Wage, wenn sie aus ihrer horizontalen Lage gebracht wird, oder noch nicht in dieselbe gekommen ist, sich von selbst in diese Lage begeben. Sie wird aber vorher einige Schwingungen machen, welche immer kleiner und kleiner werden, bis die Ruhe erreichet ist. Denn hier kann man sich wiederum das ganze Gewicht der Wage und der daran hän-

hängende Körper als eine Last C vorstellen, die durch eine steife Linie mit dem Punkte K verbunden ist.



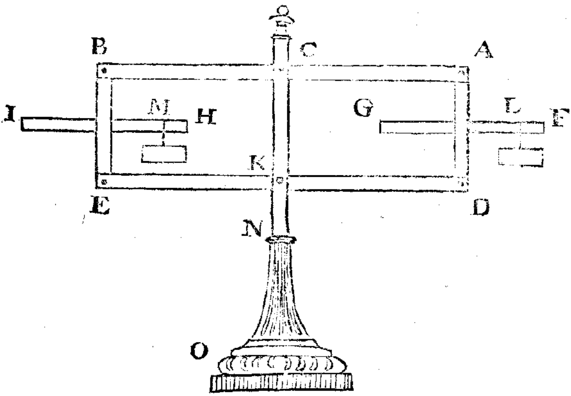
Es wird sich C von selbst in den horizontalen Stand R begeben. Da aber ein in Bewegung gesezter Körper ein Vermögen hat, seine Bewegung von selbst weiter fortzusetzen, so wird die Last C, welche schon den Bogen CR beschrieben hat, noch den Bogen RS durchlaufen, der aber wegen der Reibung und wegen des Widerstandes der Luft etwas kleiner sein wird. Nun fällt die Last wieder zurück in R, überschreitet aber wiederum das Ziel, und steiget nach C hin, jedoch weniger als vorher. Und so fahren die Schwingungen fort, werden aber immer kleiner und kleiner, bis die Last im Punkte R ruhend bleibet, da dann KR eine Vertikale Linie ist.

Ist nun C der Mittelpunkt einer Wage, und K die Welle, so wird, wenn C in R gekommen ist, die Lage des Zúngleins vertikal und des Balkens horizontal sein. Auf diese Art werden die Wagen meistens verfertiget, nämlich so, daß die Welle etwas aufwärts nach dem Zünglein hin, nicht aber vollkommen in der Mitte des Balkens, der Dicke nach, zu stehen komme.

§. 11.

Der Königliche Professor Roberval in Paris erfand im vorigen Jahrhundert eine Wage, welche seinen Namen

men führet, und zwar keinen merkwürdigen Nutzen hat, sondern nur wegen des Sonderbaren die Neugierde reizen kann; indem bei einer solchen Wage zwei gleiche Schweren auch dann das Gleichgewicht halten, wenn sie in ungleicher Weite von der Mitte der Wage angebracht sind.



ACBEKDA ist ein Parallelogramm, von vier Linealen gemacht, die in den Ecken so zusammengefüget sind, daß sich das Parallelogramm leicht verschieben lasse. Dieses Parallelogramm gehet durch die lothrechte Säule CN, welche auf einem Fuße NO stehet. Zu diesem Behuf ist in der Säule ein Schlitz oder Kerb gemacht, und die Lineale AB und DE sind in ihren Mitten jedes um einen Nagel bei C und K beweglich. An den vertikalen Linealen AD und BE sind zwei Arme FG und HI senkrecht befestiget. Bei dieser Einrichtung siehet man leicht, daß sich das Parallelogramm, um die Punkte C und K herum, eben so drehen K
läßt, wie die Arme einer gemeinen Wage, daß AD und BE allemal vertikal, hingegen FG und HI allemal horizontal bleiben.

Hängt man an den Armen FG und HI gleiche Gewichte in gleicher Entfernung von der Säule, als in F und I oder in G und H, so ist alles beiderseits gleich, und die Wage wird unverrücket bleiben, eben so als wäre es eine gemeine Wage. Was aber diese Wage Besonderes hat, ist dieses, daß das Gleichgewicht ebenfalls statt findet, wenn auch die Gewichte an beiden Armen in ungleichen Entfernungen von der Säule aufgehänget werden, zum Exempel bei L und M.

Um dieses zu erklären, muß man betrachten, daß das Gewicht M vermittelst des Armes HI auf das Lineal BE wirket, und dieses auf eine doppelte Art, nämlich 1) um das Lineal seitwärts herumzudrehen, welches nothwendig geschehen würde, wenn es nur an einem Ende befestiget wäre, und 2) um das Lineal herunter zu ziehen. Das Herumdrehen wird aber vermöge der Nägel bei C und K verhindert, und hat also keinen Erfolg. Es bleibet demnach nur das Herunterziehen. Nämlich das Gewicht bei M ziehet das Lineal BE herunter, als wenn es in B angehänget wäre. Eben so ist es mit dem anderen Gewichte bei L beschaffen: auch dieses ziehet das Lineal AD herunter, als wäre es in A herunterhängend. Folglich kommen wir auf den Fall der gemeinen Wage zurück, wo an den Enden B und A der gleichen Arme CB und CA gleiche Lasten angebracht sind, welche folglich einander das Gleichgewicht halten.

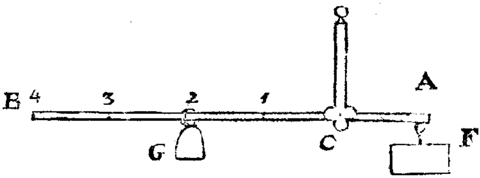
Ziehet man aber den Nagel bei K heraus, so ist der Fall nicht mehr der nämliche. Die Lineale BE und AD werden alsdann durch die Gewichte wirklich seitwärts gedrehet, und die Wage bekömmt eine solche Lage, daß die gleichen Gewichte sich in gleichen Entfernungen von der Säule befinden.

§. 12.

Eine Schnellwage ist eine solche, wo die Lasten, welche einander das Gleichgewicht halten sollen, nicht nothwendig gleich und in gleichen Entfernungen von der Welle der Wage sein müssen. Man kann eine solche Wage auf eine geometrische oder auch bloß auf eine mechanische Art verfertigen.

§. 13.

Soll eine Schnellwage auf eine geometrische Art verfertiget werden, so nehmet zum Wagebalken eine eiserne oder hölzerne Stange A B, welche 2, 3 oder 4 Fuß lang sei.



In dieser Stange nehmet nach Gefallen einen Punkt C, welcher dieselbe in zwei ungleiche Theile theilet, so daß der Arm C B weit länger sei als der Arm C A.

Bei C bringet die Welle, das Zünglein und die Scheere an, eben so wie bei der gemeinen Wage.

Um nun zu machen, daß der Balken schon für sich selbst horizontal stehen bleibe, so beschweret das Ende A des kleineren Arms mit Blei, welches hinlänglich sei, um dem Arm C B das Gleichgewicht zu halten, so daß der ganze Balken A B horizontal stehe. Auch könnte man beide Arme, wie bei der gemeinen Wage gleich machen,

da

da dann der Balken von selbst horizontal bleibe, und den Punkt A nach Belieben wählen.

Ferner bringet in A einen Haken an, woran man die Körper, welche gewogen werden sollen, aufhängen könne.

Machet ein Gewicht G von beliebiger Schwere, z. E. von 1 Pfund, oder 5 oder 10 ℔ u. s. w. nachdem ihr gedenket, größere oder kleinere Lasten zu wägen.

Dieses Gewicht muß einen Ring haben, dessen Schwere zum Gewichte selbst mitgerechnet wird. Der Ring dienet, um daß das Gewicht auf dem längeren Arme hin und her geschoben werden könne. Ein solches Gewicht wird hier der **Läufer** genannt.

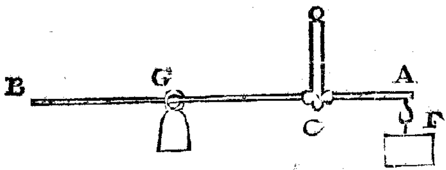
Fasset mit den Zirkel die Länge AC des kleineren Armes, und traget sie auf den größeren von C aus, so viel mal als es angehet, z. Ex. von C nach 1, von 1 nach 2, von 2 nach 3, u. s. f. Die Zahlen schreibet auf den Balken.

Soll nun eine Last F gewogen werden, so wird sie am Haken bei A gehänget. Der Läufer aber wird hin und her geschoben, bis daß er mit der Last das Gleichgewicht hält. Alsdann merket man die Zahl bei welcher er stehet, und multiplizirет mit derselben das Gewicht G, so hat man die Schwere der abgewogenen Last.

Denn da der Balken in horizontaler Lage stehen bleibet, so kann man sagen, so vielmal die Entfernung CG größer ist als AC, so vielmal ist auch die Last F schwerer als die Last G. Die Zahl aber über G zeiget an, wie viel mal CG länger ist als AC, also auch wie viel mal die Last F schwerer ist als das Gewicht G; und wenn man das Gewicht G sovielmal nimmt, oder mit gedachter Zahl multipliziret, so bekömmt man die Schwere der in A angehänghängten Last F. Es sei z. E. G ein Gewicht von 1 Pfund, und es stehe dieses Gewicht G bei der Zahl 2, so wieget die Last in A zweimal 1 Pfund oder 2 Pfund. Es sei das Gewicht G von 5 Pfund, so wieget die Last in A, 2mal 5 Pfund, oder 10 Pfund, u. s. w.

§. 14.

Will man die Schnellwage auf eine bloß mechanische Art verfertigen, das heißt, durch bloßes Versuchen, so nimmt man wie vorher eine Stange AB, machet daran eine Welle an einem beliebigen Orte C, sammt einer Nadel



oder einem Zünglein. Man hänget auch, wie vorher, die Welle in eine Scheere, welche vermittelst eines Ringes an einem Nagel aufgehänget werden kann. Es brauchet aber der kürzere Arm AC nicht mit Blei belastet zu werden, weil es hier gar nicht nöthig ist, daß der Balken von selbst horizontal stehen bleibe.

An dem Haken F unter dem Ende A werden nun nach einander verschiedene Gewichte angehänget, z. Ex. 1 ℔, 2 ℔, 3 ℔, 4 ℔, 5 ℔, 6 ℔, u. s. w. oder auch 5 ℔, 10 ℔, 15 ℔, 20 ℔, u. s. w. Jedesmal schiebet man das Gegengewicht oder den Läufer, welcher wie vorher beschaffen ist, so lange hin und her, bis er mit dem in F angehängten Gewichte das Gleichgewicht hält; und wo der Läufer stehet, schreibet man auf dem Wagebalken die Anzahl der in F angehängten Pfunde. Wird nun dieses mit

jedem

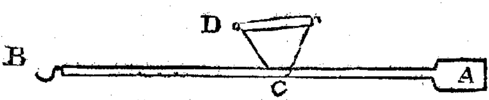
jedem in F angehängten Gewichte wiederholet, so hat man die Eintheilung des Wagebalkens.

Hierbei ist zu merken, daß der Läufer so schwer oder leicht sein kann, als man es für gut befindet; auch kann er von unbekannter Schwere sein.

Diese mechanische oder empirische Verfertigung der Schnellwage ist geschwinder und in der Ausübung sicherer als die geometrische, wo der Wagebalken vollkommen gerade, und an sich selbst schon in vollkommenem Gleichgewichte sein muß, worin leicht ein kleiner Fehler begangen werden kann. Der Gebrauch ist ungefähr wie bei der geometrischen Schnellwage. Der abzuwägende Körper wird am Haken F gehänget, und der Läufer so lange geschoben, bis er das Gleichgewicht hält. Die Zahl, die am Orte ist, wo der Läufer stehet, zeiget die Schwere des Körpers an. Z. Ex. stehet 10 ℔ bei G geschrieben, so wieget der in F hängende Körper 10 Pfund: denn bei Verfertigung dieser Wage hielt der in G bei der Zahl 10 hängende Läufer mit einem in F hängenden Gewicht von 10 Pfund das Gleichgewicht. Da er also jezt mit der in F hängenden Last auch das Gleichgewicht hält, so muß ihre Schwere ebenfalls 10 Pfund betragen.

§. 15.

Es giebt noch eine andere Art der Schnellwage, welche ebenfalls am besten auf eine empirische oder mechanische Art verfertiget wird, und welche man sehr bequem in der Tasche tragen kann.



Es

Es wird eine Stange AB genommen, mit einem dicken Knopfe in A, welcher noch dazu mit einem eisernen oder bleiernen Ringe beschlagen wird. Am Ende B ist ein Haken befestiget. Anstatt des Läufers hat man ein Stück Holz D, welches zum Handgriff dienet: an beiden Enden desselben ist eine Schnur angebunden, worinnen der Balken AB geleget wird. Nun werden den in B nach und nach verschiedene Gewichte angehänget, z. E. 1 ℔, 2 ℔, 3 ℔ u. s. f. und jedesmal wird der Handgriff sammt der Schnur hin und her gerücket, bis man das Gleichgewicht getroffen hat. Dann wird am Orte, wo die Schnur stehet, unterwärts die bei B hängende Anzahl von Pfunden aufgeschrieben, und so bestimmt man die Eintheilung des Balkens. Der Gebrauch bestehet darinn, daß man die abzuwägende Last in B anhängt, und dann die Schnur hin und her rückt, bis man das Gleichgewicht getroffen hat. Die Zahl, welche alsdann bei derselben stehet, zeiget die Schwere des in B hängenden Körpers an, welches eben so wie bei der vorigen Wage (§ 14) erkläret werden muß.

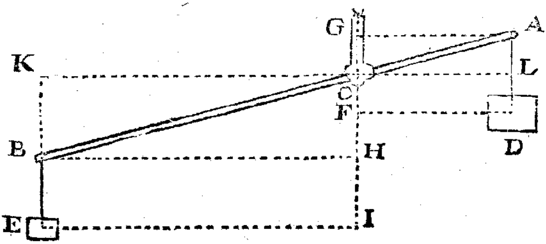
Diese Wage ist von den vorigen darinn unterschieden, daß hier der Punkt C woran die Wage hängt, fortgerücket wird, welcher bei den übrigen unverrükt bleibet. Sie kann nur bei geringen Lasten gebrauchet werden, und wenn keine große Genauigkeit erfordert wird; bei geringen Lasten, weil der Handgriff D mit der Hand gehalten wird; und mit weniger Genauigkeit, weil hier kein Zünglein statt findet, auch das Gleichgewicht sehr schwer zu treffen ist.

§. 16.

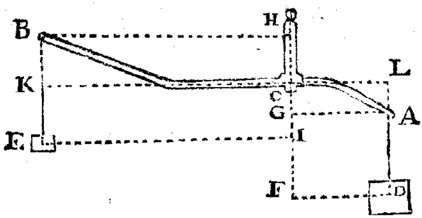
Da jede Wage nichts anders ist als ein Hebel, so müssen sich, um die Wage in Gleichgewicht zu halten, die Gewichte umgekehrt verhalten wie die Arme der Wage, oder umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Aufhänge-Punkte der Wage, wenn nämlich das Gewicht des Bal-

kens

kens aus der Acht gelassen wird, oder wenn derselbe schon für sich selbst in Gleichgewicht ist. Es wird zwar gemeiniglich der Wagebalken gerade gemacht, und angenommen, daß er im Falle des Gleichgewichts horizontal stehe, da dann das angeführte Verhältniß hinlänglich ist. Hingegen, um die Sache allgemeiner vorzustellen, muß man merken, daß die Wage sowohl als der Hebel auf verschiedene Art gebogen, oder schief gestellet werden kann. In allen Fällen aber kann das Gleichgewicht sonst nicht statt finden, als wenn die Gewichte sich umgekehrt verhalten wie ihre Entfernungen von der Vertikal-Linie, die durch den Punkt gehet, woran die Wage hänget. Diese Vertikal-Linie wollen wir, der Kürze halben, die **mittlere Vertikal-Linie** nennen. In den folgenden Figuren werden demnach die Gewichte D und E in Gleichgewicht sein, wenn sich D zu E verhält wie BH zu AG, oder wie CK zu CL, oder wie EI zu DF, welches alles einerlei ist. Hierbei aber ist nicht zu vergessen, daß beide Arme CB und CA entweder ohne Schwere gedacht werden müssen, oder daß sie so beschaffen sind, daß sie für sich selbst schon in Gleichgewicht sind. Uebrigens ist die Sache klar, so bald man sich nur erinnert, daß zum Gleichgewichte weiter nichts erforderlich ist, als daß die Kräfte D und E sich umgekehrt verhalten wie die Linien CL und CK, die auf ihre Richtungen senkrecht sind, und aus einem Punkte C in der Richtung der dritten Kraft entspringen (III Hauptst. § 16).



§. 17.



§. 17.

Da die Gewichte sich umgekehrt verhalten sollen wie ihre Entfernungen von der mittleren Vertikal-Linie, so folget daraus, daß, wenn man sowohl die Gewichte als auch die Entfernungen in Zahlen ausdrücket, und jedes Gewicht mit seiner Entfernung multipliziret, die Produkte gleich sein müssen; wohl gemerket, daß die Gewichte nach einerlei Maaß oder Einheit, und auch die Entfernungen nach einerlei Maaß bestimmet werden.

Es sei z. Ex. D = 12 Pfund, E = 8 Pfund

LC = 6 Zoll, CK = 9 Zoll, so ist

D : E :: CK : CL

oder 12 ℔ : 8 ℔ :: 9 Zoll : 6 Zoll.

Da nun in jeder geometrischen Proporzion das Produkt der äussersten Sätze dem Produkt der mittleren Sätze gleich ist, so ist auch hier

$$12 \times 6 = 8 \times 9$$

oder $D \times CL = E \times CK$

Ein solches Produkt aus der Zahl die das Gewicht ausdrücket, und der Zahl die dessen Entfernung von der mittlern Vertikallinie ausdrücket, wird das Moment der angehängten Last genannt. Also ist D × AG das Moment der Last D, und E × BH ist das Moment der Last E. Vergleiche hiermit III. Hauptst. § 17.

Man kann folglich auch sagen, daß zwey Lasten an einer Schnellwage in Gleichgewicht sind, wenn ihre Momente gleich sind, und daß die Momente gleich sein müssen, wenn das Gleichgewicht statt finden soll. Jedoch wird hierbei allemal vorausgesetzet, daß die Arme der Wage entweder schon so beschaffen sind, daß sie einander von selbst das Gleichgewicht halten, oder daß sie nur bloß als steife Linien betrachtet werden. Dieses leztere kann angenommen werden, wenn gedachte Arme, in Vergleich mit den angehängten Lasten sehr wenig wiegen.

§. 18.

Da nun beim Gleichgewichte die Momente gleich sein müssen, so folget, daß das Gleichgewicht aufhöret, so bald die Momente ungleich sind, und dann sinket dasjenige Gewicht, welches ein grösseres Moment bekömmt, das heißt, welches entweder selbst größer wird, oder sich von der mittlern Vertikallinie entfernet.

§. 19.

Frägt man was der Nagel oder die Hand, welche eine Wage hält, zu tragen hat, so ist die Antwort leicht. Nämlich der Nagel oder die Hand trägt allemal weder mehr noch weniger als die Summe der Schweren so wohl der angehängten Lasten und Gewichte, als auch aller Theile der Wage selbst. Der Nagel oder die Hand ist folglich eben so beschweret, als wenn am obersten Ringe ein einziges Gewicht herunter hienge, welches gedachter Summe gleich wäre. Vergleiche hiermit § 7, erster Fall.

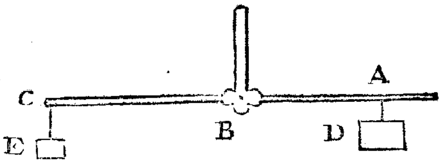
§. 20.

§. 20.

Der Lehrsatz von der Gleichheit der Momente (§ 17.) leistet die vortreflichsten Dienste bei den verschiedenen Fragen, die in Betreff der Schnellwage aufgeworfen werden können. Um aber zu verhüten, daß die ungleichen Schweren beider Arme den Erfolg der Rechnung nicht unsicher machen, so wollen wir bei den folgenden Aufgaben annehmen, daß beide Arme, eben so wie bei der gemeinen Wage, vollkommen gleich und ähnlich sind, und daß nur die Lasten in verschiedenen Entfernungen von der Mitte des Balkens angehänget sind.

§. 21.

Aufgabe.



Es sei gegeben oder bekannt das Gewicht D, nebst seiner Entfernung AB vom Punkte wo die Wage aufgehänget ist. Es sei auch gegeben ein anderes Gewicht E, Man soll die Entfernung CB bestimmen, in welcher es angehänget werden muß, wenn es dem anderen Gewichte D das Gleichgewicht halten soll.

Auflösung. Da die Momente gleich sein müssen, (§ 17.) so ist

$$E \times BC = D \times AB$$

$$\text{folglich } BC = \frac{D \times AB}{E}$$

Das heißt, man erhält BC, wenn man das Moment des andern Gewichtes D, nämlich D $\times$ AB, durch das Gewicht E theilet. Dieses folget auch aus der Proporzion (§ 16) E : D :: AB : BC

$$\text{daher} \quad BC = \frac{D \times AB}{E}$$

Exempel. Es sei D = 10 Pfund, AB = 2 Zoll, und E = 7 Pfund, so ist

$$BC = \frac{10 \times 2}{7} = \frac{20}{7} = 2\tfrac{6}{7} \text{ Zoll.}$$

§. 22.

Aufgabe.

Aus beiden gegebenen Entfernungen AB und BC, und dem einen gegebenen Gewichte D soll die Größe des andern Gewichts E bestimmet werden, welches mit dem gegebenen das Gleichgewicht halten könne. (Siehe die vorige Figur.)

Auflösung. Weil E $\times$ BC = D $\times$ AB

$$\text{so ist} \quad E = \frac{D \times AB}{BC}$$

Das nämliche folget auch aus der Proporzion (§ 16)

$$BC : AB :: D : E \left(= \frac{D \times AB}{BC} \right)$$

Man muß also das Moment des bekannten Gewichts durch die Entfernung des unbekannten theilen, so bekömmt man das unbekannte Gewicht.

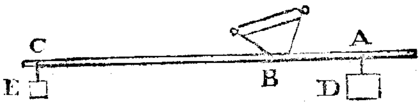
Exem-

Exempel. Es sei gegeben AB = 2 Zoll, BC = $2\frac{6}{7}$ Zoll, D = 10 Pfund, so ist

$$E = \frac{10 \times 2}{2\frac{6}{7}} = \frac{10 \times 14}{20} = \frac{14}{2} = 7 \text{ Pfund.}$$

§. 23.

Aufgabe.



Es sind die Gewichte D und E nebst der ganzen Entfernung AC zwischen beiden gegeben. Es soll der Punkt B gefunden werden, wo der Balken AB angehänget werden muß, um daß D und E einander das Gleichgewicht halten können.

Auflösung. Kennen wir die eine Entfernung AB, so wissen wir auch die andere BC, denn es wird sein BC = AC — AB. Nun ist, wegen der nothwendigen Gleichheit der Momente,

$$D \times AB = E \times BC$$

oder $D \times AB = E \times (AC - AB)$

oder $D \times AB = E \times AC - E \times AB$

oder $D \times AB + E \times AB = E \times AC$

oder $(D + E) \times AB = E \times AC$

oder . . . . . $AB = \dfrac{E \times AC}{D + E}$

Da nun $BC = AC - AB$

$$\text{so ist} \quad BC = AC - \frac{E \times AC}{D + E}$$

$$\text{oder} \quad BC = \frac{AC \times (D + E) - E \times AC}{D + E}$$

$$\text{oder} \quad BC = \frac{D \times AC + E \times AC - E \times AC}{D + E}$$

$$\text{oder} \quad BC = \frac{D \times AC}{D + E}$$

Das nämliche folget auch aus dem Grundverhältnisse (§ 16). Denn es ist

$$D : E :: BC : AB$$

$$\text{daher ist} \quad (D + E) : E :: (BC + AB) : AB$$

$$\text{oder} \quad (D + E) : E :: AC : AB \left(= \frac{E \times AC}{D + E} \right).$$

$$\text{desgleichen} \quad (D + E) : D :: (BC + AB) : BC$$

$$\text{oder} \quad (D + E) : D :: AC : BC \left(= \frac{D \times AC}{D + E} \right)$$

Diese Formeln können in Worten also ausgedrücket werden: die Summe beider Gewichte (D + E) verhält sich zu dem einen Gewichte (z. E. D), wie sich die Summe der Entfernungen (das ist AC) verhält zur Entfernung (BC) des andern Gewichtes.

Oder, wenn man die Entfernung des einen Gewichtes finden will, so muß man das andere Gewicht mit der ganzen Länge, von einem Gewicht zum andern, multipliziren, und durch die Summe beider Gewichte dividiren.

Exempel. Es sei $D = 10$ Pfund, $E = 7$ Pfund, $AC = 4\frac{6}{7}$, so wird

$$BC = \frac{10 \times 4\frac{6}{7}}{10 + 7}$$

$$= \frac{10 \times 4\frac{6}{7}}{17}$$

$$= \frac{10 \times 34}{119}$$

$$= \frac{340}{119}$$

$$= 2\tfrac{102}{119}$$

$$= 2\tfrac{6}{7}$$

Desgleichen ist

$$AB = \frac{7 \times 4\frac{6}{7}}{10 + 7}$$

$$= \frac{7 \times 4\frac{6}{7}}{17}$$

$$= \frac{7 \times 34}{119}$$

$$= \frac{238}{119}$$

$$= 2$$

Auch hätte man sogleich AB vermöge der BC finden können. Denn es ist $AB = AC - BC = 4\frac{6}{7} - 2\frac{6}{7} = 2$.

Anmerkung. Diese Auflösung ist nur in sofern richtig, als die Schwere des Balkens für nichts geachtet wird. Oder man müßte, nachdem der Punkt B gefunden wor-

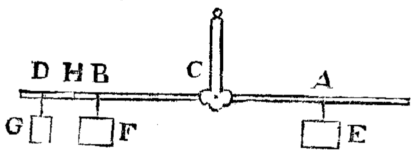
 den,

den, den einen Arm verlängern oder verkürzen, bis beide gleich wären, oder auch den kürzeren Arm etwas beschweren, so daß er dem längeren das Gleichgewicht halten könnte.

Uebrigens beziehet sich diese Aufgabe hauptsächlich auf diejenige Art von Schnellwage, welche in § 15 beschrieben worden. Man braucht nur den Knopf an derselben als das eine Gewicht, und die am andern Ende angehängte Last als das andere betrachten.

§. 24.

Eine Last hält zwei oder zwei halten einer das Gleichgewicht, an dem Balken der Schnellwage, wenn das Moment einerseits der Summe der Momente anderseits gleich ist.



Gesezt, es sei $E \times AC = F \times BC + G \times DC$, so wird die einzige Last E den Lasten F und G das Gleichgewicht halten.

Denn man stelle sich vor, beide Gewichte F und G hängen nicht unmittelbar an dem Wagebalken AD, sondern an einem kleineren Balken BD, und dieser sei in H am größeren angehänget, so daß F und G einander das Gleichgewicht halten, so muß sein

$$F : G :: HD : HB$$

oder $(F + G) : G :: (HD + HB) : HB$

oder $(F + G) : G :: BD : HB$

daher

$$\text{daher}\quad HB = \frac{BD \times G}{F+G}$$

$$\text{folglich}\ CH = CB + BH = CB + \frac{BD \times G}{F+G}$$

$$\text{oder}\quad CH = \frac{CB \times F + CB \times G + BD \times G}{F+G}$$

$$\text{oder}\quad CH = \frac{CB \times F + (CB + BD) \times G}{F+G}$$

$$\text{oder}\quad CH = \frac{CB \times F + CD \times G}{F+G}$$

$$\text{daher}\ CH \times (F+G) = CB \times F + CD \times G$$

Da nun vorausgesetzet worden, daß $CB \times F + CD \times G = E \times AC$, so ist

$$CH \times (F+G) = AC \times E$$

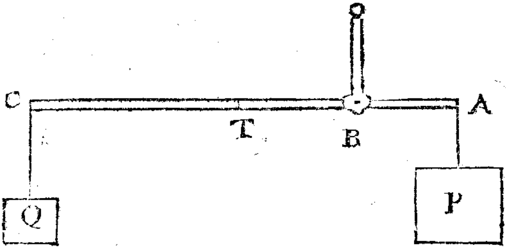
Bei der angenommenen Voraussetzung aber, daß BD ein besonderer kleiner Wagebalken ist, der am größern in H angehänget ist, trägt der Punkt H wirklich die Last $F+G$.

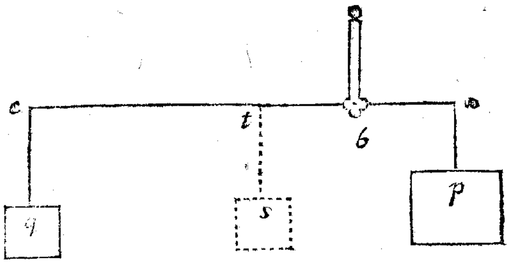
Das Moment dieser Last ist also $(F+G) \times CH$, und da dieses Moment dem Momente $E \times AC$ gleich ist, so muß E mit $F+G$ in Gleichgewicht sein.

Zusatz. Dieser Lehrsatz giebt uns ein Mittel an die Hand, um die Schwere des Wagebalkens bei der Berechnung der Schnellwage mit in Anschlag zu bringen.

Es sei AC der Wagebalken, dessen Ruhepunkt B, die an den Enden angehängten Gewichte P und Q.

(Siehe die beiden folgenden Figuren.)





Soll nun die Schwere des Balkens AC in Anschlag genommen werden, so stelle man sich, an Statt der gegebenen Wage, eine andere bloß mathematische vor, so daß anstatt des Balkens AC nur eine gerade steife Linie ac vorhanden sei. Uebrigens bleiben alle Größen unverändert, nämlich $ab = AB$, $bc = BC$, $p = P$, $q = Q$. Es sei ferner der Schwerpunkt des Balkens AB in T. Es ist leicht einzusehen, daß dieser Schwerpunkt in der Mitte des Balkens ist, wenn derselbe durchaus von einerlei Dicke und einerlei Materie ist. Uebrigens mag der Punkt T liegen, wo man will, so hindert dieses nichts, wenn nur seine Lage bekannt ist. Nun nehme man $ct = CT$, so daß der Punkt t den Punkt T vorstelle. Da

Da nun T der Schwerpunkt des Balkens AC ist, so kann man sich dessen ganze Schwere in T vereiniget vorstellen. Oder man stellet sich anstatt AC die bloße Linie *ac* vor, und in *t* ein Gewicht *s*, welches der Schwere des Balkens gleich sei.

Soll nun das Gleichgewicht statt finden, so muß sein

$$p \times ab = q \times bc + s \times bt$$

oder, wenn wir das Gewicht des Balkens durch S ausdrücken,

$$P \times AB = Q \times BC + S \times BT$$

Da hier S und BT als bekannt angenommen werden, so läßt sich jede der vier übrigen Größen bestimmen, so bald drei derselben gegeben sind.

Z. E. Es sei AB $= \frac{1}{2}$ Fuß, BC $= 1\frac{1}{2}$ Fuß, so ist AC $= 2$ Fuß, und, wenn der Balken einförmig ist, CT $= 1$ Fuß, und BT $= \frac{1}{2}$ Fuß.

Das Gewicht S des Balkens sei $= 3$ Pfund. Es sei ferner P $= 8$ Pfund, und es werde das Gewicht Q gesuchet, welches das Gleichgewicht halte, so ist

$$8 \times \frac{1}{2} = Q \times 1\frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2}$$

$$8 = Q \times 3 + 3$$

$$\frac{8 - 3}{3} = Q$$

$$\frac{5}{3} = Q$$

$$1\frac{2}{3} = Q$$

Wäre

Wäre die Schwere des Balkens aus der Acht gelassen, so hätte man bloß gehabt

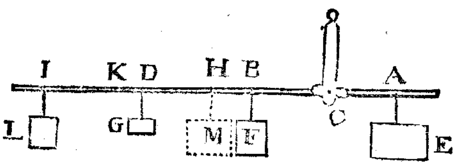
$$8 \times \tfrac{1}{4} = Q \times 1\tfrac{1}{2}$$
$$8 = Q \times 3$$
$$\tfrac{8}{3} = Q$$
$$2\tfrac{2}{3} = Q$$

welches Q um ein ganzes Pfund zu groß giebt.

§. 25.

Der vorhergehende Lehrsatz gilt im Allgemeinen von so viel Gewichten als man will, und kann also ausgedrücket werden: Mehrere Gewichte halten eines oder mehrere in Gleichgewicht, wenn die Summe der Momente einerseits dem Momente oder der Summe der Momente anderseits gleich ist.

Gesezt in folgender Figur



sei $E \times AC = F \times BC + G \times DC + L \times IC$, so wird die einzige Last E den Lasten F, G und L das Gleichgewicht halten. Denn man stelle sich vor, daß F und G an einem besonderen Balken BD und dieser am größeren in H aufgehänget sei, so daß F und G am Balken BD einander das Gleichgewicht halten, so ist bewiesen worden, daß (§ 24.)

$$CH \times (F + G) = F \times CB + G \times CD$$

und

und daß die Lasten F und G eben so wirken als hinge eine einzige Last, welche ihrer Summe gleich ist, in H. Laßt uns demnach in Gedanken eine Last $M = F + G$ in H anhängen. Nun betrachten wir beide Lasten M und L, und stellen uns einen besonderen Wagebalken HI vor, der in K am größeren aufgehänget sei, und an welchem M und L einander das Gleichgewicht halten, so muß sein

$$M : L :: IK : HK$$
$$(M + L) : L :: (IK + HK) : HK$$
$$(M + L) : L :: HI : HK$$

$$\text{daher } HK = \frac{L \times HI}{M + L}$$

$$\text{folglich } CK = CH + HK = CH + \frac{L \times HI}{M + L}$$

$$= \frac{CH \times M + CH \times L + HI \times L}{M + L}$$

$$= \frac{CH \times M + (CH + HI) \times L}{M + L}$$

$$= \frac{CH \times M + CI \times L}{M + L}$$

Nun ist $M = F + G$ und $CH \times M = F \times CB + G \times CD$

also wird $\quad CK = \dfrac{F \times CB + G \times CD + L \times CI}{F + G + L}$

oder

$$CK \times (F + G + L) = F \times CB + G \times CD + L \times CI.$$

Es wurde aber angenommen, daß $F \times CB + G \times CD + L \times CI = E \times AC$, also ist

$$CK \times (F + G + L) = E \times AC$$

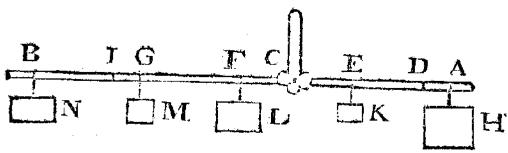
Nun

Nun ziehen aber die Gewichte $F + G + L$ in der That, als wenn sie alle drei am Punkte K hingen. Also ist $(F + G + L) \times CK$ ihr Moment, und da dieses Moment dem Momente $E \times AC$ gleich ist, so hält A alle drei Lasten F, G und L in Gleichgewicht.

Auf eine ähnliche Art läßt sich der Beweis auf mehrere Gewichte fortsetzen.

Man merke hierbei hauptsächlich auf den Punkt K, wo alle Lasten F, G, L angehänget werden könnten, um die nämliche Wirkung zu thun, als die besondern Lasten vermöge ihrer verschiedenen Momente. Aus den angeführten Exempeln, und aus der weitern Fortsetzung derselben wird man schließen, daß die Entfernung CK dieses Punktes allemal gefunden wird, wenn man die Summe der Momente, als hier $F \times CB + G \times CD + L \times IC$, durch die Summen der Massen als hier durch $F + G + L$ dividiret.

Gesetzet nun, es hängen beiderseits mehrere Lasten, und die Summen der Momente sind beiderseits gleich.



Zum Exempel, es sei $H \times CA + K \times CE = L \times CF + M \times CG + N \times CB$, so müssen wiederum die Lasten H und K den Lasten L, M und N das Gleichgewicht halten. Denn es sei D der Punkt, wo die beiden Gewichte H und K müßten angefüget werden, um die nämliche Wirkung

kung zu thun, als sie jetzt vermöge ihrer Momente thun, so ist, wie kurz vorher angemerket worden,

$$CD = \frac{H \times CA + K \times CE.}{H + K}$$

$$\text{oder } CD \times (H + K) = H \times CA + K \times CE.$$

Es sei auch I der Punkt, wo die drei Gewichte L, M und N hängen müßten, um die nämliche Wirkung zu thun, die sie jetzt thun, so ist aus dem nämlichen Grunde

$$CI = \frac{L \times CF + M \times CG + N \times CB}{L + M + N.}$$

$$\text{oder } (L + M + N) \times CI = L \times CF + M \times CG + N \times CB$$

Kurz, es ist

$$(H + K) \times CD = H \times CA + K \times CE$$

$$\text{und } (L + M + N) \times CI = L \times CF + M \times CG + N \times CB$$

Nun wurde aber angenommen, daß

$$H \times CA + K \times CE = L \times CF + M \times CG + N \times CB$$

Daraus folget nun, daß

$$(H + K) \times CD = (L + M + N) \times CI$$

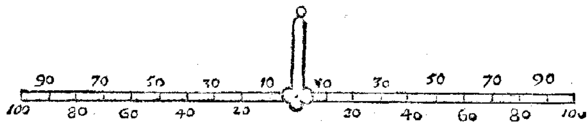
Das heißt, wenn die Gewichte H und K zusammen in D, und die Gewichte L, M und N zusammen in I hingen, so wären die Momente beiderseits gleich, und es entstünde das Gleichgewicht. Da nun alle diese Gewichte mit ihren jetzigen Momenten die nämliche Wirkung thun, als wenn H und K in D, hingegen L, M und N in I angehänget wären, so bleiben sie auch jetzt in Gleichgewicht.

§. 26.

§. 26.

Auf dem vorhergehenden Lehrsatze beruhet ein Zeitvertreib, welchen man die mechanische Arithmetik nennet.

Zu diesem Behufe mache man sich eine Schnellwage, wovon jeder Arm in 100 gleiche Theile eingetheilet sei, wie in folgender Figur.



Das Numeriren oder die Vorstellung der Zahlen geschiehet folgendermaßen. Man nehme ein beliebiges Gewicht, zum Exempel 1 Unze, und hänge es bei der Zahl auf, die man vorstellen will. Will man, zum Exempel, die Zahl 83 vorstellen, so muß das Gewicht bei 83 aufgehänget werden, da dann das Moment dieses Gewichtes der verlangten Zahl gleich ist. Denn $1 \times 83 = 83$. Ist die Zahl über Hundert, so werden die Hunderte durch die Anzahl der Unzen ausgedrücket, die bei 100 auf dem Wagebalken angehänget werden. Z. Ex. Man soll vorstellen die Zahl 583, so werden die 83 wie vorher ausgedrücket, hingegen um die 500 auszudrücken, werden bei 100 5 Unzen angehänget, alsdann ist das Moment $100 \times 5 = 500$, und beide Momente zusammen machen 583. Wollte man Tausende haben, so müßten bei 100, zehn, zwanzig, dreißig Unzen u. s. w. angehänget werden. Z. B. 3583 wird ausgedrücket, indem man bei 83 ein Gewicht von 1 Unze, bei 100 ein Gewicht von 5 Unzen, und noch bei 100 ein Gewicht von 30 Unzen, also bei Hundert überhaupt 35 Unzen anhänget, da dann die Summe der Momente 3583 beträgt.

Ist

Ist der eine Arm der Wage mit einer oder mehreren Lasten beladen, und man will die Wirkung dieser Last oder Lasten durch eine Zahl vorstellen, so schiebe man am andern Arme das Gewicht von 1 Unze hin und her, bis das Gleichgewicht erhalten ist, und nehme die bei dieser Unze stehende Zahl. Reicht diese Unze zu, so muß die Zahl über hundert sein. Man hänge also bei Hundert nach und nach 1 Unze, 2 Unzen, 3 Unzen u. s. w. 10 Unzen, 11 Unzen, 12 Unzen u. s. f. an, bis man das Gleichgewicht entweder ganz oder nächstens getroffen hat. Fehlet noch etwas, so schiebe man ein anderes Gewicht von einer Unze hin und her, bis man das Gleichgewicht völlig bekömmt, dann summire man die Momente. Zum Exemp. Gesezt 13 Unzen die bei 100 hängen seien zu wenig, hingegen 14 zu viel, so lasse man die 13 Unzen hängen, und schiebe noch ein Gewicht von einer Unze hin und her. Gesezt man erhalte das Gleichgewicht wenn diese Unze auf 75 stehet, so ist die Summe der Momente $13 \times 100 + 1 \times 75$ das ist 1375, welche Zahl alsdann die Wirkung der an dem anderen Arme hängenden Gewichte ausdrücket.

§. 27.

Es seien nun folgende Zahlen zu addiren, 57, 793, 2174, 125, so muß ich vorgeschriebener Weise die Zahlen 57, 793, 2174, 125, alle auf dem einen Arme der Wage anbringen. Alsdann suche ich auf dem anderen Arme, wie im vorigen Paragraph gelehret worden, den Werth der ganzen Wirkung, und finde 3149; nämlich um das Gleichgewicht zu halten, muß ich 31 Unzen bei 100, und 1 bei 49 anhängen. Also ist 3149 die verlangte Summe.

Es soll 924 von 1219 subtrahiret werden. So bringe ich die Zahl 1219 auf den einen Arm, und 924 auf den anderen. Nun wird auf der Seite der Zahl 924 etwas fehlen, um das Gleichgewicht zu halten. Und ich finde, daß das Gleichgewicht nicht eher Statt findet, als wenn ich bei 100 noch 2 Unzen, und bei 95 eine Unze angehänget habe; daher ich dann sehe, daß zu 924 noch 295 hinzugethan werden müssen, um 1219 zu erhalten. Also ist der Unterschied oder Rest 295.

Es sei 67 mit 15 zu multipliziren, so hänge ich entweder 15 Unzen an der 67ten Abtheilung, oder 67 Unzen an der 15ten Abtheilung. Auf der anderen Seite suche ich das Gleichgewicht, und finde, daß ich es erhalte, wenn ich 10 Unzen bei 100, und noch 1 Unze bei 5 aufhänge; daher ich denn sehe, daß das Produkt 1005 sein muß.

Es soll 1005 durch 15 dividiret werden, so bringe ich die Zahl 1005 auf den einen Arm, auf dem andern schiebe ich ein Gewicht von 15 Unzen hin und her, bis das Gleichgewicht getroffen ist. Dieses wird geschehen, wenn die 15 Unzen bei 67 hängen. Also ist 67 der Quozient.

Da diese mechanische Arithmetik nur ein bloßes Spiel, oder, wenn man will, eine Erläuterung des Gesetzes der gleichen Momente ist, so wollen wir uns nicht länger dabei aufhalten. Beweise sind unnöthig, weil sie unmittelbar aus gedachtem Gesetze gefolgert werden können.

Fünf=

Fünftes Hauptstück.

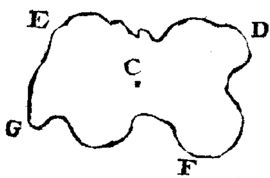
Von den Schwerpunkten.

§. 1.

Nachdem wir von dem Hebel und der Wage geredet haben, so wäre es Zeit zur Erklärung der übrigen Maschinen zu schreiten. Jedoch da die Lehre von den Schwerpunkten so genau mit der vorhergehenden Theorie verknüpfet ist, so wird der Leser uns verzeihen, daß wir die Schulordnung etwas verletzen, um den Zusammenhang der Wahrheiten selbst nicht zu trennen.

§. 2.

Wir haben schon, bei Gelegenheit der Schwere der Körper, gesaget, was der Schwerpunkt sei, nämlich ein solcher Punkt, um welchen herum alle Theile des Körpers bei jeder Lage desselben, einander das Gleichgewicht halten.



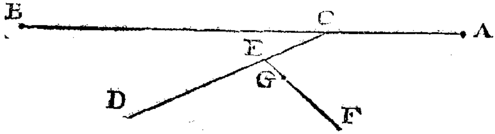
3. Er. Es sei der Punkt C im Körper DEGFD so beschaffen, daß wenn man diesen Punkt unterstützen oder befestigen könnte, der Körper um denselben herum in Ruhe bleibe, ohne sich von selbst zu drehen, in welcher Lage man

ihn auch stellen möchte; so ist C der Schwerpunkt des Körpers DEGFD.

§. 3.

In jedem Körper, er mag seiner Gestalt oder Materie nach beschaffen sein wie man will, er mag homogen oder heterogen sein, ist allemal ein Schwerpunkt, und nur ein einziger vorhanden.

Dieses wird folgender Weise bewiesen.



Es seien A, B, D und F unendlich kleine körperliche Theile von ungleicher Schwere. Man verbinde A und B durch eine steife Linie AB ohne Schwere, und suche in dieser Linie den Punkt C, so daß AC sich zu CB verhalte, wie B zu A, so stellet ACB eine Schnellwage vor, und wird der Punkt C unterstützet oder festgehalten, so trägt er die Summe der Lasten A und B, und diese Lasten bleiben im Gleichgewichte, es mag übrigens die Lage der AB horizontal sein oder nicht, wie bei der Schnellwage gezeiget worden. (IV Hauptst. §. 16.)

Man verbinde ferner das Theilchen D mit dem Punkte C vermittelst der steifen Linie CD, und suche den Punkt E, so daß ED sich zu EC verhalte wie (A + B) zu D. Wird nun der Punkt E festgehalten, so hält D das Gleichgewicht mit A + B, welche eben so wirken, als wenn sie in C vereiniget wären. Um den Punkt E herum werden also die drei kleine Lasten A, B und D einander das Gleichgewicht halten, man mag übrigens die Linien AB und CD

stel-

stellen wie man will. Der Punkt E trägt allemal die Summen der Gewichte A, B und D.

Das Theilchen F, welches nicht nothwendig in der Ebne ABD lieget, verbinde man mit dem Punkte E, vermittelst der steifen Linie FE, und suche in derselben einen Punkt G, so daß FG sich verhalte zu GE wie (A + B + D) zu F, und es werde der Punkt G festgehalten oder gestüzzet, so bleibet FE in jeder Lage stehen die man ihr geben will, und F hällt allemal das Gleichgewicht mit dem Punkte E, welcher mit A, B und D belastet ist.

Daß kein anderer Punkt als der Punkt G diese Eigenschaft hat, ist leicht einzusehen. Denn kein anderer Punkt als C kann A und B im Gleichgewicht halten, weil jeder andere Punkt ungleiche Momente geben würde. Eben so kann kein anderer Punkt als E den Punkt C, welcher beide Gewichte A und B trägt, und zugleich D im Gleichgewicht halten, weil $(A + B) \times CE = D \times DE$ sein muß. Ferner hat kein anderer Punkt als G die Eigenschaft, daß $(A + B + D) \times GE = F \times GF$.

Hieraus muß man schließen, daß, wenn man auch die Verbindung in einer andern Ordnung vorgenommen hätte, man doch allemal zulezt auf den Punkt G gekommen wäre.

Dieser Beweis kann nun auf so viel Theilchen der Materie fortgesezzet werden als man will. Auch gilt er, wenn die Theile an einander stoßen; denn man darf nur erst die etwas entfernten verbinden, hernach aber nach und nach die mittleren dazu nehmen.

Da nun jeder Körper aus solchen Theilchen bestehet, die zum Theil einander berühren, so folget, daß in jedem Körper ein (und nur ein) Schwerpunkt vorhanden ist.

§. 4.

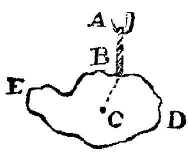
Wenn der Schwerpunkt eines Körpers gestützet oder festgehalten wird, so ruhet der ganze Körper, ohne sich zu drehen. Dieses ist eine Folge der Erklärung. In diesem Falle trägt die Stütze, welche den Schwerpunkt hält, die Schwere aller Theile des Körpers, oder des ganzen Körpers. Denn der Punkt G in der letzten Figur trägt die Last F, und die Last, womit der Punkt E beladen ist, das ist, die Lasten A, B und D.

Man kann sich demnach vorstellen, daß die ganze Schwere eines Körpers oder aller seiner Theile im einzigen Schwerpunkte gesammlet sei, und dort ihre Wirkung äußere, wie schon mehrmal erinnert worden.

Wenn also irgend ein Punkt eines Körpers oder einer Maschine den Schwerpunkt einer Last stützet, so trägt dieser Punkt wirklich die ganze Last, und man muß sich vorstellen, daß die Bemühung, welche die Last äußert, um sich zur Erde hin zu bewegen, sich in ihrem Schwerpunkte vereiniget, und dort ihre ganze Wirkung ausübet.

§. 5.

Wenn ein Körper an einem seiner äußersten Theile aufgehänget wird, so drehet er sich, bis sein Schwerpunkt mit dem Aufhängepunkt in einer Vertikal-Linie lieget. Z. E.

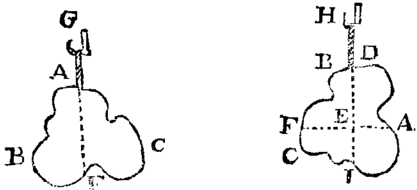


Der Körper DE sei in B an einem Faden AB befestiget, und sein Schwerpunkt sei in C, so stelle man sich eine steife Linie BC vor, an deren Ende C der Schwerpunkt befes-

befestiget sei; dann ist es eben so viel, als wenn am Ende der Stange BC ein Gewicht wäre, das dem Gewicht des Körpers BC gleich ist (§ 4). Dieses Gewicht nun kann nicht eher ruhen, als bis es die niedrigste Stelle erreichet hat, und dieses geschiehet nicht eher als bis sich die Linie BC in eine vertikale Richtung geleget hat. Also wird C sich von selbst so legen, daß C mit B sich in einer vertikalen Linie befinde. Hänget nun noch dazu der Punkt B an einem Faden, so wird auch der Faden sich vertikal legen (III Hauptst. §. 22.) Folglich werden in diesem Falle die Punkte A, B und C alle drei in einer Vertikal-Linie zu liegen kommen.

Man siehet leicht ein, daß einige Schwingungen erfolgen werden, bevor alles in Ruhe bleibet (IV H. § 10.)

Zusatz. Vermöge der vorhergehenden Bemerkung läßt sich der Schwerpunkt jedes Körpers durch zwei Versuche bestimmen.



Man hänge den Körper ABC an einem seiner äußeren Punkte, als in A, auf, so wird sich der Schwerpunkt in die Vertikal-Linie GAF legen; folglich, wenn man GA durch den Körper verlängert, so ist man gewiß, daß der Schwerpunkt irgendwo in der Linie AF befindlich ist. Um diese Linien AF zu erkennen, könnte man eine dünne Nadel durch den Körper stecken, oder auch ein feines Loch durchbohren.

Nun hänge man wiederum den Körper bei einem andern Punkte D auf, so wird er sich wiederum so legen, daß der Schwerpunkt in der verlängerten Vertikal-Linie HD, das ist. in der Linie DI liege. Auch diese Linie kann durch eine dünne Nadel oder ein feines Loch angedeutet werden.

Wo sich nun beide Linien AF und DI schneiden, da muß der Schwerpunkt sein. Denn da er in beiden Linien liegen soll, so kann er kein anderer als der Punkt E sein, welcher beiden Linien gemein ist.

Daß aber die zweite Linie der ersten begegnen und dieselbe schneiden, nicht aber seitwärts vorbei gehen werde, solches folget daraus, daß sie beide nothwendig durch den Schwerpunkt gehen; und da nur ein einziger solcher Punkt statt findet §. 3., so müssen sie durch diesen Punkt gehen, und folglich einander schneiden.

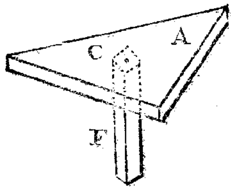
Es ist wohl kaum nöthig, zu erinnern, daß der zweite Aufhängepunkt nicht am anderen Ende der ersten Vertikallinie, z. E. in F genommen werden muß. Denn sonst würde die zweite Vertikal-Linie mit der ersten zusammentreffen, und mit ihr einerlei sein.

Uebrigens, so dünn auch die Nadeln oder Löcher sind, womit man die Linien im Körper zeichnet, so werden sie doch allemal die Lage des Schwerpunktes ein wenig verrücken. Auch dienen sie nur hier, um eine sinnliche Vorstellung dieser Linien zu geben, welche eigentlich unsichtbar und ohne Schwere sind.

§. 6.

Wenn ein Körper A auf einem Pfeiler F lieget, so ruhet er, wenn nur der Schwerpunkt C sich gerade über der

der Stütze befindet. Denn der Schwerpunkt kann wegen der unter ihm sich befindenden Materie des Körpers und

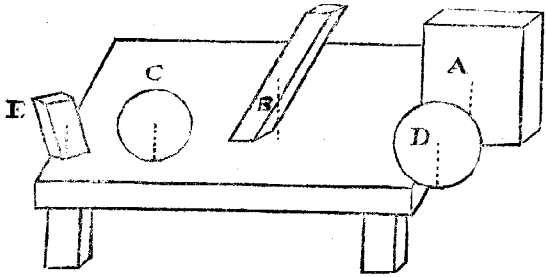


wegen des Pfeilers nicht sinken. Da nun der Körper selbst an seinem Schwerpunkte wie an dem Aufhängepunkte einer Wage im Gleichgewichte bleibet, so muß alles ohne Bewegung bleiben.

Wenn ein Körper auf solche Art von unten gestützet ist, so muß der Pfeiler einige Breite haben. Denn, wenn er die Last nur in einem Punkte berührte, so wäre es sehr schwer und fast unmöglich, das Gleichgewicht zu erhalten. Die geringste Neigung der Last würde den Schwerpunkt seitwärts von der Stütze ablenken, und der Körper müßte dann fallen. Es ist hier ohngefähr der nämliche Fall wie mit der Wage, wenn der Punkt, woran sie hänget, niedriger ist, als die Punkte, woran die Gewichte hängen oder befestiget sind. (IV H. § 10.)

§. 7.

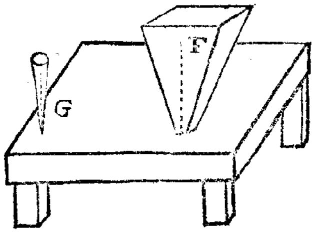
Wenn ein Körper auf einer horizontalen Ebene, als zum Exempel auf einem Tische oder auf der Erde, gestellet wird, so ruhet er in dem Falle, da die Vertikal-Linie, die durch seinen Schwerpunkt gehet, die untere Fläche des Körpers in einem Punkte trift, wo diese Fläche die horizontale Ebne berühret. Ist dieses nicht, so muß der Körper fallen.



So wird z. Ex. der Körper E auf dem Tische ruhen, weil die Vertikal-Linie, die durch den Schwerpunkt gehet, die Grundfläche da [illegible]r ist, wo sie den Tisch berühret. Die Kugel C ruhet ebenfalls, weil die besagte Vertikal-Linie die äußere Fläche der Kugel allemal im Berührungspunkte trifft. Denn es ist leicht einzusehen, daß der Schwerpunkt einer Kugel nichts anders als der Mittelpunkt derselben sei. Hingegen der Körper B muß umfallen, weil sein Schwerpunkt nicht gestützet ist. Eben so wird auch der Körper A und ebenfalls die Kugel D vom Tische herunter fallen, weil die Schwerpunkte nicht gestützet sind.

(Siehe die vorhergehende Figur.)

Wenn

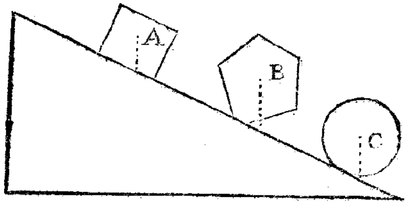


Wenn ein Körper auf einer kleinen Grundfläche ruhet, wie der Körper F, so ist er sehr leicht umzustoßen, weil eine geringe Bewegung hinlänglich ist, um die Vertikallinie, die durch seinen Schwerpunkt gehet, außerhalb der Grundfläche zu bringen. Ist der Körper aber ganz spitz, wie zum Exempel der Körper G, so ist es aus der nämlichen Ursache fast unmöglich, ihn so zu stellen, daß er in Gleichgewicht bleibe, da sogar die geringste Bewegung der Luft ihn aus seiner Lage bringen kann. Vergleiche hiermit § 6.

§. 8.

Wenn man einen Körper auf eine Ebene leget, welche nicht horizontal, sondern schief ist, so wird der Körper entweder längs derselben gleiten, oder er wird herunter rollen. Das erstere geschiehet oft, wenn die Vertikal-Linie, die durch den Schwerpunkt gehet, einen Theil der Fläche des Körpers trift, der die schiefe Ebene berühret, und von derselben gestützet wird. Das andere wird meistens erfolgen, wenn gedachte Linie erst durch die Luft gehet, bevor sie die schiefe Ebne erreichet; da dann die Reibung der schiefen Ebne die

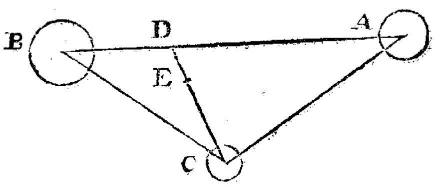
die berührten Theile etwas zurückhält, und dadurch das Umwälzen oder Rollen des Körpers verursachet.



Nach dieser Regel würde der Körper A bloß gleiten, hingegen B und C würden rollen. Da aber hier vieles auf die Reibung ankömmt, so werden wir die Sache in der Folge etwas genauer untersuchen müssen.

§. 9.

Wenn mehrere Körper durch steife Linien oder auf irgend eine andere Art verbunden sind, so haben sie einen gemeinsamen Schwerpunkt. Z. Ex. Gesezt, die drei



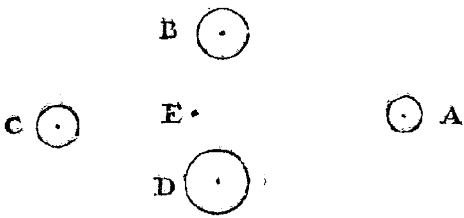
Körper A, B und C sind durch die steifen Linien AB, AC und BC verbunden. Theile AB in D, so daß DB zu DA sich verhalte wie A zu B. Ziehe DC, und theile sie in E, so daß DE zu EC sei, wie C zu A + B, so ist E der gemeinsame Schwerpunkt der drei Körper A, B und C.

Wenn

Wenn also der Punkt E durch steife Linien entweder mit den Körpern selbst oder mit den steifen Linien AB, AC, BC verbunden wird, und wenn dieser Punkt gestützet wird, so müssen die drei Körper einandere in jeder Lage das Gleichgewicht halten. Eben so verhält sichs mit mehreren Körpern.

§. 10.

Wenn verschiedene Körper, als A, B, C und D auch nicht mit einander verbunden sind, so haben sie dennoch



einen gemeinsamen Schwerpunkt E, der sie alle in Gleichgewicht halten würde, wenn sie verbunden würden; und dieser Punkt E wird gefunden, wenn man Verbindungslinien ziehet, und dann so zu Werke gehet, wie im vorhergehenden Paragraph gelehret worden.

Man merke hierbei, daß eine Sammlung verschiedener verbundener oder unverbundener Körper die man als einen gemeinsamen Schwerpunkt habend betrachtet, ein System dieser Körper genannt wird.

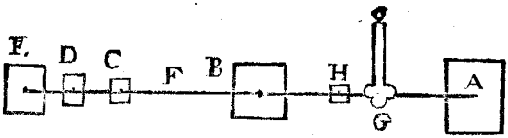
§. 11.

Aufgabe.

Verschiedene Körper liegen in einer geraden Linie. Es soll ihr gemeinsamer Schwerpunkt gefunden werden

(Siehe die folgende Figur.)

Es



Es soll z. Ex. der gemeinsame Schwerpunkt F der Massen H, B, C, D, E gefunden werden, so daß der Punkt F alle in Gleichgewicht hielte, wenn die Linie HE steif würde und die Körper an derselben befestiget würden.

Ist F der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Körper H, B, C, D und E, so muß ihre Schwere so wirken, als wenn sie in F gesammlet wäre.

Verlängere die Linie EH und stelle dir dieselbe als eine Schnellwage vor, die irgendwo im Punkte G aufgehänget ist. Am andern Arme hänge ein Gewicht A an, welches H, B, C, D und E in Gleichgewicht halte.

Nun haben wir also den Fall der Schnellwage, wo einerseits mehrere Gewichte hängen. Es werde die Entfernung GF gesuchet, so daß das Gleichgewicht unverändert bliebe, wenn die Summe aller Gewichte H, B, C, D und E in F hinge.

Diese Entfernung wird erhalten wie bei der Schnellwage gelehret worden, (IV H. § 25.) wenn man die Summe der Momente durch die Summe der Massen oder Gewichte theilet.

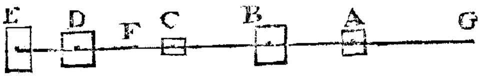
Demnach ist

$$GF = \frac{H \times GH + B \times BG + C \times CG + D \times DG + E \times EG}{H + B + C + D + E}$$

Da

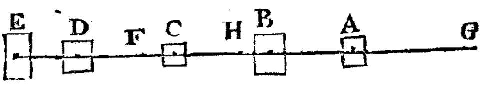
Da nun der Punkt F so beschaffen ist, daß sich die Schwere aller Körper H, B, C. D, E in ihm vereiniget, so ist er der gemeinsame Schwerpunkt dieser Körper.

Diese Betrachtung leitet uns auf folgende Regel. Wenn man den gemeinsamen Schwerpunkt verschiedener Massen, die in einer geraden Linie AE liegen, finden soll, so wähle man in



der Verlängerung derselben Linie einen willkührlichen Punkt G. Man multiplizire das Gewicht jedes Körpers durch seine Entfernung vom gewählten Punkte. Dieses giebt die Momente in Rücksicht auf den gewählten Punkt. Die Summe dieser Momente theile man durch die Summe der Gewichte, so bekömmt man die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes vom gewählten Punkte G. Exempel wären überflüßig, da ein jeder sich selbst welche aufgeben kann. Noch ist hierbei zu merken, daß gedachte Entfernungen von den Schwerpunkten der Körper an genommen werden müssen. Denn ein jeder Körper wirket so, als wenn sein ganzes Gewicht in seinem Schwerpunkte vereiniget wäre.

Will man, anstatt des Punktes G einen andern Punkt H nehmen, der zwischen den Körpern lieget, und die Lage



desselben bestimmen, so bleibet die Regel die nämliche; nur muß, anstatt der Summe der Momente, die wirkliche Summe der Momente einerseits des Punktes H, weniger

dir

die Summe der Momente anderseits des nämlichen Punktes verstanden werden, denn nun ist $GF = GH + HF$, $AG = GH - AH$, $BG = GH - BH$ &c. $GD = GH + HD$, &c.

Folglich wird nach der allgemeinen Regel

$$GH + HF = \frac{A(GH - AH) + B(GH - BH) + C(GH + CH) + D(GH + DH) + E(GH + HE)}{A + B + C + D + E}$$

oder

$$GH + HF = \frac{\left\{\begin{array}{l} A \times GH - A \times AH + B \times GH - B \times BH + C \times \\ GH + C \times CH + D \times GH + D \times DH + E \times \\ GH + E \times HE \end{array}\right.}{A + B + C + D + E}$$

oder

$$GH + HF = \frac{\left\{\begin{array}{l} (A + B + C + D + E)\,GH + C \times CH + D \times DH \\ + E \times EH - A \times AH - B \times BH \end{array}\right.}{A + B + C + D + E}$$

oder

$$GH + HF = GH + \frac{C \times CH + D \times DH + E \times EH - A \times AH - B \times BH}{A + B + C + D + E}$$

folglich

$$HF = \frac{(C \times CH + D \times DH + E \times EH) - (A \times AH + B \times BH)}{A + B + C + D + E}$$

Träfe es sich, daß der gewählte Punkt H eben in F fiele, so wäre er der Schwerpunkt selbst. Folglich müßte dieser Punkt alle Körper in Gleichgewicht halten. Folglich müßten die Summen der Momente beiderseits gleich sein. Und da kein Gleichgewicht entstehen konnte, wenn diese Summen ungleich wären, so kann man allemal schließen, daß man den gemeinsamen Schwerpunkt getroffen hat, wenn die Summen der Momente beiderseits gleich sind.

Diese

Diese Eigenschaft des gemeinsamen Schwerpunktes wird auch so ausgedrücket: daß im Betreff desselben die algebraische Summe aller Momente null ist, das heißt, die positiven werden von den negativen aufgehoben oder vernichtet. Ist demnach F der Schwerpunkt, so ist

$$D \times DF + E \times EF = A \times AF + B \times BF + C \times CF$$

oder

$$D \times DF + E \times EF - A \times AF - B \times BF - C \times CF = o$$

oder

$$(D \times DF + E \times EF) - (A \times AF + B \times BF + C \times CE) = o$$

Dieser Lehrsatz, welcher an sich selbst schon einleuchtend genug ist, läßt sich auch, wenn man will, aus der allgemeinen Regel herleiten. Denn es ist

$$GF = \frac{A \times AG + B \times BG + C \times CG + D \times DG + E \times EG}{A + B + C + D + E}$$

Da nun G gewählet werden kann wo man will, so wollen wir setzen, G fiele in F. Dann muß $GF = o$ sein, folglich

$$o = \frac{A \times AG + B \times BG + C \times CG + D \times DG + E \times EG}{A + B + C + D + E}$$

folglich

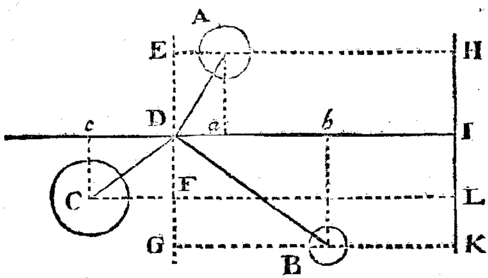
$$o = A \times AG + B \times BG + C \times CG + D \times DG + E \times EG$$

Das heißt, im Betreff des Schwerpunktes F, ist die algebraische Summe aller Momente null, welches nicht anders geschehen kann, als wenn einige Momente positiv, andere aber negativ werden, und wenn die Summe der negativen Momente so viel beträgt als die Summe der positiven.

§. 12.

Aufgabe.

Den gemeinsamen Schwerpunkt einiger Körper finden, die zwar nicht in einer geraden Linie, aber doch in einer Ebne liegen.



Gesezet, die Körper A, B und C befinden sich in einer Ebne, so können diese Körper mit der Ebne allemal so gestellet werden, daß die Ebne vertikal werde. Die Ebne sei demnach wirklich vertikal.

Es sei ferner D der unbekannte gemeinsame Schwerpunkt der Körper A, B, C. Man stelle sich die steifen Linien DA, DB, DC vor, so muß der Punkt D, vermöge dieser Linien, alle gedachte Körper in Gleichgewicht halten, und der Punkt D kann als der Aufhängepunkt einer Art von Schnellwage mit mehreren Armen betrachtet werden. Nun ist aber vielfältig angemerket worden, daß die Wirkung der angehängten Lasten bloß von ihrer Entfernung von der Vertikal-Linie abhängt, die durch den Aufhängepunkt gehet. Es sei EG diese Vertikal-Linie, und *bc* sei horizontal. So wirket C eben so als wäre dieser Körper an der Linie *bc* in *c* befestiget, A wie in *a*, und B wie

wie in b. Wäre also bc der Wagebalken, so müßten an demselben die gegebenen Körper ebenfalls in Gleichgewicht bleiben, wenn sie in c, a, und b angebracht wären.

Nun werde die Linie cb verlängert, und irgendwo in derselben ein Punkt I angenommen, so wird der gemeinsame Schwerpunkt der in a, b, und c wirkenden Gewichte gefunden, indem man machet (§ 11)

$$\mathrm{ID} = \frac{\mathrm{B} \times b\mathrm{I} + \mathrm{A} \times a\mathrm{I} + \mathrm{C} \times c\mathrm{I}}{\mathrm{B} + \mathrm{A} + \mathrm{C}}$$

Man ziehe eine Vertikal-Linie HK durch I, und die Horizontal-Linien EAH, GBK, CFL, so ist $\mathrm{ID} = \mathrm{HF} = \mathrm{LF} = \mathrm{KG}$, und zeiget die Entfernung der Vertikal Linie EG, die durch den Schwerpunkt gehet, von der willkürlichen Vertikal-Linie HK. Ferner ist $b\mathrm{I} = \mathrm{BK}$, $a\mathrm{I} = \mathrm{AH}$, $c\mathrm{I} = \mathrm{CL}$, folglich wird

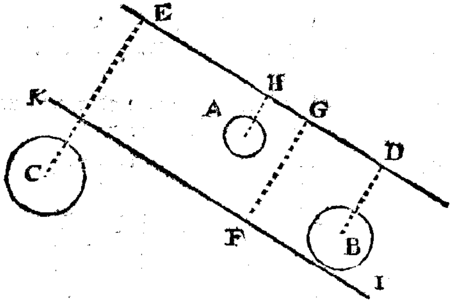
$$\mathrm{ID} = \frac{\mathrm{A} \times \mathrm{AH} + \mathrm{B} \times \mathrm{BK} + \mathrm{C} \times \mathrm{CL}}{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}}$$

Das heißt, die Entfernung der gesuchten Vertikal-Linie, die durch den Schwerpunkt gehet, wird gefunden, wenn man jedes Gewicht mit seiner senkrechten Entfernung von der willkürlich angenommenen multipliziret, und die Summe der Produkte durch die Summe der Gewichte dividiret.

Nun kann die Figur, nämlich die Körper sammt jeder willkürlichen Linie, die in derselbigen Ebne lieget, allemal so gestellet werden, daß diese Linie vertikal werde. Z. E. die Körper seien A, B und C, und die Linie DE sei in ganz willkürlicher Lage (doch in der Ebne ABC) gezogen, so kann ich die ganze Ebne EDBC so drehen, daß DE vertikal

(Siehe die folgende Figur.)

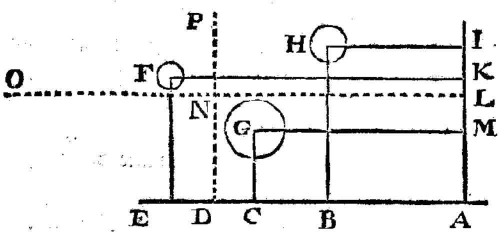
 werde,



werde, und dann muß der gemeinsame Schwerpunkt F in einer mit DE parallelen Linie IK so liegen, daß die Entfernung

$$GF = \frac{A \times AH + B \times BD + C \times CE}{A + B + C}$$

Hieraus folget nun diese Regel:



Wenn einige Körper als F, G und H in einer Ebne liegen, so ziehe willkürlich in derselben Ebne zwei Linien AE und AI, die einander durchschneiden; am bequemsten nimmt man sie senkrecht gegen einander. Diese Linien werden die Axen der Momente genannt, und jedes Gewicht mit seiner Entfernung von einer dieser Axen ist das Moment des Gewichtes in Betreff dieser Axe. Man theile die

die Summe aller Momente in Betreff der einen Axe durch die Summe aller Gewichte, so bekömmt man die Entfernung des Schwerpunktes von derselbigen Axe. Man thue das nämliche für die andere Axe, so bekömmt man auch die Entfernung des Schwerpunktes von dieser zweiten Axe. In beiden Entfernungen ziehe man mit den Axen parallele Linien, so schneiden sie einander im Schwerpunkte.

Also findet man

$$LN = \frac{H \times HI + F \times FK + G \times GM}{H + F + G}$$

und in der Entfernung LN wird DP mit AI parallel gezogen. Eben so ist

$$DN = \frac{H \times HB + G \times GC + F \times FE}{H + G + F}$$

und in der Entfernung DN wird LO mit AE parallel gezogen. Der Punkt N, wo beide Linien einander schneiden, ist der gemeinsame Schwerpunkt der Körper F, G und H.

Denn, stellet man die Figur so, daß AI vertikal sei, so ist bewiesen worden, daß der Schwerpunkt in der Linie DP liegen muß. Drehet man nun die Figur so um, daß AE vertikal werde, so wird auch LO vertikal, und ist die Linie, worin der Schwerpunkt liegt. Kein anderer Punkt aber als N lieget in beiden Linien zugleich, also ist N der verlangte Schwerpunkt.

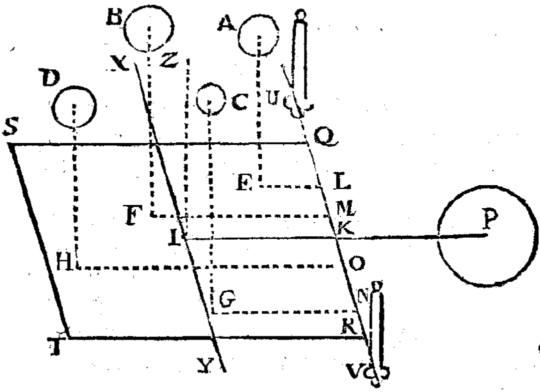
Wenn eine der Axen der Momente zwischen den Körpern durchgienge, so müßten die Momente einerseits positiv und anderseits negativ angenommen werden; Dieses ist leicht aus dem Anfange des gegenwärtigen Paragraphs herzu-

herzuleiten, wo die Körper als auf eine einzige Linie wirkend betrachtet wurden, welches uns auf den Fall des vorigen Paragraphs zurück führet. Und gienge eine Axe durch den Schwerpunkt selbst, so müste in Betrachtung derselben die algebraische Summe der positiven und negativen Momente null sein. Giengen beide Axen durch den Schwerpunkt, so müsten, in Betrachtung beider, die Summen der positiven und negativen Momente null sein, welches ebenfalls auf den angeführten Gründen beruhet.

§. 13.

Aufgabe.

Den gemeinsamen Schwerpunkt einiger Körper finden, die nicht in einer Ebene liegen.



Es werde der gemeinsame Schwerpunkt der Körper A, B, C, D verlanget, die nicht in einer Ebne liegen.

Lege unterhalb der Körper eine horizontale Ebne QRTS. Stelle dir vor, diese Ebne sei an der Linie UV befesti-

befestiget, um welche sie sich herumdrehen könne, ohne daß die Linie selbst aus ihrer Lage komme. Von allen Körpern laß Vertikallinien AE, BF, CG, DH auf die horizontale Ebne fallen. Stelle dir diese Linien steif vor, so daß vermittelst derselben die schweren Körper eben so drücken als wären sie in E, F, G und H.

Nun haben wir also den vorigen Fall, nämlich wo der gemeinsame Schwerpunkt I verschiedener Gewichte gesuchet wird, die bei E, F, G und H in einer Ebne liegen. Die Entfernung KI des Schwerpunktes von der UV wird demnach sein.

$$KI = \frac{A \times EL + B \times MF + C \times GN + \times D \times HO}{A + B + C + D}$$

Folglich wirken alle Gewichte als wenn sie in I vereiniget wären, und ihr gemeinsames Moment ist $(A + B + C + D) \times KI$.

So, daß, wenn man $KP = KI$ und P gleich $(A + B + C + D)$ machte, alles in Gleichgewicht bleiben würde.

Obgleich die Entfernung KI jetzt bekannt ist, so ist doch die eigentliche Lage des Punktes I noch nicht bestimmet, sondern nur die Lage der Linie XY, worinn sich der gemeinsame Schwerpunkt finden muß, in so fern die Gewichte auf die Fläche RS drücken.

Nun stelle man sich durch die Linien UV und XY vertikale Ebenen vor, so wird der wahre Schwerpunkt, der gerade über I, z. Ex. in Z lieget, in der Ebne sein, die durch XY gehet; und die Entfernung dieser Ebne von der andern Vertikalen die durch UV gehet, wird ebenfalls durch die Linie KI bestimmt. Man merke ferner, daß die Linien EL, FM, GN, HO denen gleich sind, welche die Entfernungen der Körper messen, von der willkührlichen vertikalen Ebne die durch die willkührliche horizontale Linie UV gehet. Es wird aber die Entfernung jedes Körpers von der willkührlichen vertikalen Ebne, wenn man das Gewicht des Körpers mit solcher Entfernung multiplizirel, das Moment des Körpers in Betreff solcher Ebne genannt. Ferner kann man anstatt der willkührlichen vertikalen Ebne jede andere, auch nicht vertikale Ebne nehmen, und dann alles herumdrehen, bis die Ebne vertikal werde.

Daraus folget nun, daß man die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes verschiedener Körper von einer beliebigen Ebne findet, wenn man die Summe der Momente aller Körper in Betreff der Ebne durch die Summe der Massen (oder Gewichte) dividiret. Gienge die angenommene Ebne zwischen den Körpern durch, so müste man unter der Summe der Momente verstehen, die Summe der Momente einerseits, weniger die Summe der Momente anderseits. Und gienge die angenommene Ebne durch den Schwerpunkt selbst, so wäre die Summe der Momente beiderseits gleich, oder die Summe der positiven und negativen Momente würde null sein. Dieses erhellet aus solchen Betrachtungen, wie bei § 11. und § 12 gemachet worden.

Wenn also der gemeinsame Schwerpunkt einiger Körper bestimmt werden soll, die nicht in einer Ebne liegen, so nehme man nach Belieben drei Ebnen an, die einander schneiden. Am bequemsten wird es sein, wenn jede auf den beiden übrigen senkrecht stehet, so daß z. Ex. die eine horizontal, die beiden übrigen aber vertikal und senkrecht gegen einander seien. Die Summe der Momente in Betreff der einen Ebne dividire man durch die Summe der Gewichte, und in der gefundenen Entfernung lege man eine Ebne mit der ersteren paral-

parallel, so liegt der Schwerpunkt in derselben. Man thue das nämliche in Betreff der zweiten willkührlichen Ebne, und mit derselben in der gefundenen Entfernung lege man wiederum eine Ebne parallel, so lieget auch der Schwerpunkt in dieser gefundenen Ebne, folglich in der Durchschnittslinie dieser und der vorher gefundenen. Endlich verrichte man das nämliche in Betreff der dritten willkührlichen Ebne, und in der gefundenen Entfernung lege man wiederum eine Ebne, so wird der Schwerpunkt auch in dieser liegen, folglich im Punkte, wo diese durch den gemeldeten Durchschnitt gehet. Die Einbildung wird hier bessere Dienste leisten, als eine Figur, welche, als eine perspektivische Zeichnung, etwas verworren ausfallen würde.

§. 14.

Von den Schwerpunkten der Körpersysteme kommen wir auf die Schwerpunkte einzelner Körper zurück. Wir haben zwar schon gezeiget, wie dieselben versuchsweise bestimmet werden können. Jezt aber wollen wir lehren, wie sie in manchen Fällen auch geometrisch gefunden werden können.

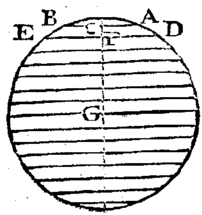
Vorher aber müssen wir noch dieses anmerken, daß bei der geometrischen Bestimmung des Schwerpunktes allemal vorausgesezet wird, daß der Körper durchaus von gleicher Dichtigkeit oder von homogener Materie sei. Ferner, wenn man von dem Schwerpunkte einer Fläche redet, so verstehet man darunter eigentlich einen Körper, der eine merkliche Länge und Breite, aber eine unendlich kleine und einförmige Dicke hat. Desgleichen, wenn vom Schwerpunkte einer Linie geredet wird, so muß man sich einen Körper von endlicher Länge, aber unendliche kleiner doch gleichförmiger Breite und Dicke denken.

§. 15.

Der Schwerpunkt einer geraden Linie ist in der Mitte derselben, und wenn die Mitte unterstützet wird, so muß die ganze Linie in Gleichgewicht bleiben. Man darf sich nur die gerade Linie als eine Zusammensetzung von unendlich viel gleich großen schweren Punkten vorstellen. Für jeden Punkt einerseits ist ein Punkt anderseits in gleicher Entfernung von der Mitte, welcher mit ihm das Gleichgewicht hält, indem beide gleiche Momente haben. Also wird die Summe der Momente beiderseits gleich sein, und folglich wird der Mittelpunkt die ganze Linie im Gleichgewicht halten.

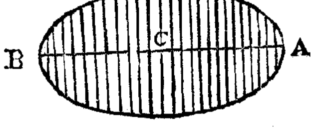
§. 16.

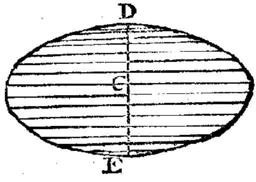
Der Schwerpunkt so wohl des Umkreises als auch der Fläche eines Zirkels, einer Ellipse, oder eines regulären Vielecks ist im Mittelpunkte der Figur.



Man ziehe einen Diameter des Zirkels, und gedenke sich unendlich viel Sehnen wie AB, DE auf demselben senkrecht. Man stelle sich diese Sehnen als steife (nicht schwere) Linien vor, welche an ihren Enden schwere Theilchen wie A und B, D und E tragen, woraus die Kreislinie bestehet. So fällt der gemeinsame Schwerpunkt von A und B in die Mitte C der Linie AB, eben so fällt der gemeinsame Schwerpunkt von D und E in F u. s. w. Ist also der Diameter eine steife Linie, so hält er beide Hälften der Kreislinie im Gleichgewicht. Der gemeinsame Schwerpunkt aller Theilchen der Kreislinie lieget demnach im Diameter. Man nehme noch einen andern Diameter, so gilt das nämliche von ihm. Da also der Schwerpunkt in beiden Diametern lieget, so liegt er im Mittelpunkt G, wo sie einander schneiden. Wenn also der Mittelpunkt vermittelst steifer Linien, mit der Zirkellinie verbunden wird, so wird gedachter Mittelpunkt die Kreislinie in allen möglichen Lagen im Gleichgewicht halten, und zugleich wird er das ganze Gewicht der Kreislinie tragen.

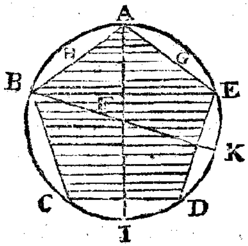
Ist nicht bloß von der Kreislinie sondern von der Kreisfläche die Rede, so stelle man sich vor, die Kreisfläche bestehe aus unendlich vielen nicht bloß steifen, sondern schweren parallelen Linien, wie AB, DE. Diese alle werden vom Diameter, der sie halbiret, im Gleichgewicht gehalten, und da dieses von jedem andern Diameter gilt, wenn man die Zirkelfläche aus geraden Linien zusammensetzet, die auf ihm senkrecht stehen, so folget, wie vorher, daß auch der Schwerpunkt der Kreisfläche im Mittelpunkte derselben lieget.





Wenn

Wenn man durch die große Axe AB der Ellipse senkrechte Ordinaten ziehet, so halbiret sie jede derselben. Also folget, wie beim Zirkel, daß die große Axe sowohl die elliptische Linie als auch die elliptische Fläche in Gleichgewicht hält. Das nämliche gilt von der kleinen Axe DE, wenn man die Ordinaten auf derselben senkrecht stellet. Folglich ist der Schwerpunkt sowohl der Linie als der Fläche, da, wo beide Axen einander schneiden, das heißt im Mittelpunkt C.

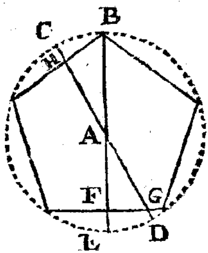


Es sei ABCDEA ein reguläres Vieleck, zum Exempel ein Fünfeck. Aus der einen Ecke A ziehe man durch den Mittelpunkt F des umgeschriebenen Zirkels den Durchmesser AI desselben, und im Vielecke gedenke man sich unendlich viel gerade Linien auf diesem Durchmesser senkrecht, so halbiret der Durchmesser alle diese Linien, und hält sowohl den Umfang des Vielecks als auch die Fläche in Gleichgewicht. Das nämliche gilt von jedem anderen Durchmesser BK. Folglich ist der Schwerpunkt im Mittelpunkte F, wo beide Durchmesser einander schneiden.

Man hüte sich aber, daraus zu schließen, daß jeder Durchmesser das Vieleck halbire.

(Siehe die folgende Figur.)

Zum

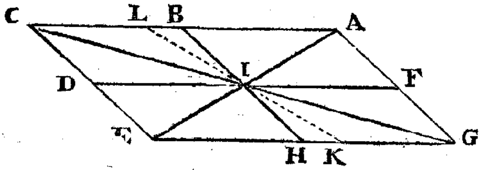


Zum Exempel, der Durchmesser BE oder dessen Theil BF halbiret zwar das Vieleck, nicht aber der Durchmesser CD oder dessen Theil HG. Denn, wäre dieses, so müßte das Dreieck AHB was einerseits abgehet, anderseits durch das Dreieck AFG ersetzet werden. Es ist aber sichtbar, daß diese beiden Dreiecke ungleich sind. Auch ist HB nicht der FG gleich. Also halbiret HG weder den Umfang des Vielecks noch das Vieleck selbst. Dennoch wird der Diameter HG oder CD das Vieleck und dessen Umfang im Gleichgewichte halten, weil er den Schwerpunkt A unterstützet. Hieraus folget, daß in diesem Falle zwar die Summen der Momente beiderseits gleich sind, aber nicht die Summen der Gewichte, das heißt, die Summen der Punkte oder Linien, woraus der Umfang oder die Fläche beiderseits bestehet.

Nur wenn der Diameter aus dem Scheitel eines Winkels ausgehet, so halbiret er allemal das Vieleck und dessen Umfang. Ferner, wenn das Vieleck eine paarige Anzahl von Seiten hat, z. E. 4, 6, 8, 10, u. s. f. so halbiret der Diameter dasselbe in jeder Lage, weil alsdann Dreiecke entstehen, wovon das eine den Abgang des andern ersetzet.

§. 17.

Der Schwerpunkt eines Parallelogramms, sowohl für den Umfang als auch für die Fläche, ist in in der Mitte desselben, das heißt, im Punkte, wo beide Diagonal-Linien einander schneiden, oder wo die geraden Linien einander schneiden, welche die entgegengesetzten Seiten halbiren.



Man gedenke sich unendlich viel Linien wie BH mit AG und CE parallel, so wird die Linie FD, welche AG und CE halbiret, auch BH und alle übrige Parallelen halbiren. Folglich hält FD sowohl den Umfang als auch die Fläche des Parallelogramms in Gleichgewicht. Man gedenke sich ferner lauter Linien wie FD mit AC und GE parallel, so werden sie alle von BH halbiret, welche durch die Mitten der AC und der GE gezogen worden. Folglich hält auch BH sowohl den Umfang als die Fläche in Gleichgewicht. Also ist der Schwerpunkt in I, wo FD und BH einander schneiden, oder, welches einerlei ist, im Punkte, wo die Diagonalen AE und CG einander schneiden.

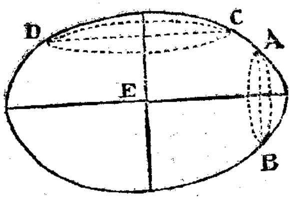
Bei dem Parallelogramme trifft es ein, daß jede durch den Schwerpunkt gezogene Linie, wie KL, sowohl den Umfang als auch die Fläche halbiret.

§. 18.

Der Schwerpunkt einer Kugel, eines elliptischen Konoïden, eines regulären Polyhedrons, sowohl für die Oberfläche als auch für die Solidität selbst, ist im Mittelpunkte des Körpers.

Man

Man stelle sich vor, daß eine Kugel aus unendlich viel parallelen Ebnen bestehe, so sind diese Ebnen lauter Zirkel, und ihre Schwerpunkte liegen in einem Diameter der Kugel. Werden nun die Ebnen als bloß steife Ebnen betrachtet, so hält der Diameter alle ihre Umkreise, folglich die ganze Oberfläche der Kugel im Gleichgewicht. Werden sie aber als schwere Ebnen betrachtet, so hält der Diameter sie selbst, und folglich die Kugel im Gleichgewichte. Und da dieses von jedem Diameter gilt, so liegt der Schwerpunkt sowohl der Kugelfläche als auch des Körpers, da, wo die Diameter einander schneiden, das ist im Mittelpunkte.



Was den elliptischen Konoïden betrifft, so kann man ihn betrachten als wäre er aus unendlich viel Zirkeln zusammengesetzt, die alle, wie AB, auf der großen Axe senkrecht stehen, so daß, wie bei der Kugel, die Hauptaxe sowohl die Oberfläche als auch den Körper im Gleichgewicht hält. Man kann aber auch diesen Körper betrachten als bestehend aus unendlich viel Ellipsen, wie CD, die auf der kleinen Axe senkrecht stehen. Diese aber haben alle ihre Schwerpunkte, sowohl des Umfanges als der Fläche in gedachter kleinen Axe; also hält auch die kleine Axe den Körper oder dessen Oberfläche in Gleichgewicht. Folglich ist der Schwerpunkt im Mittelpunkte E, wo beide Axen einander schneiden.

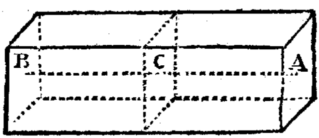
Was die regulären Polyhedern betrifft, z. Ex. das Dodekaedron, so ziehe man in Gedanken von der einen

Ecke

Ecke, das ist, von der Spitze eines körperlichen Winkels, einen Diameter durch den Mittelpunkt der umschriebenen Kugel. Man schneide nun den Körper vermittelst unendlich vieler Ebnen, die auf gedachtem Diameter senkrecht stehen, so werden diese Ebnen alle ihre Schwerpunkte, sowohl des Umkreises als auch der Fläche im Diameter haben. Eben dieses wird geschehen, wenn man den Diameter aus der Spitze eines andern körperlichen Winkels ziehet. Folglich wird der Schwerpunkt, sowohl der Oberfläche als auch des Körpers im Mittelpunkte der umschriebenen Kugel liegen.

§. 19.

Der Schwerpunkt eines Zylinders oder Prisma ist in der Mitte der Axe, die durch die Schwerpunkte beider entgegengesezten Grundflächen gehet, und dieses sowohl für den Körper selbst, als für seine ganze Oberfläche, oder auch nur für den Mantel, das ist, für die Oberfläche ohne die Grundflächen.



Zum Exempel. Es seien A und B die Schwerpunkte beider Basen, und folglich AB die Axe. Es sei C die Mitte der Axe, so ist C zugleich der Schwerpunkt des Körpers. Denn man stelle sich vor, der Körper sei in C vermittelst einer Ebne geschnitten, die mit den Basen parallel sei, und er bestehe aus unendlich vielen gleichen dünnen Scheiben, die ebenfalls mit den Basen parallel seien. So ist erstlich klar, daß der Schwerpunkt in der Axe AB lieget, weil

weil sie durch alle besondere Schwerpunkte der Scheiben gehet. Ferner für jede Scheibe, die einerseits der Ebne lieget, die durch C gehet, ist eine auf der anderen Seite von gleichem Gewichte und in gleicher Entfernung. Also sind beiderseits gleiche Momente. Folglich lieget der Schwerpunkt auch in der Ebne, die durch C gehet. Also liegt er im Punkte C, wo diese Ebnen von der Axe AB durchschnitten wird. Dieser Beweis gilt eigentlich für den Körper selbst. Nun seien A und B nicht die Schwerpunkte der Flächen, sondern der Umfänge der Basen, welche Schwerpunkte, wie wir bald sehen werden, nicht allemal zusammen fallen. Hier müssen wir uns die gedachten Scheiben als bloße steife Flächen, deren Umfänge nur schwer sind, vorstellen; und dann gilt der nämliche Beweis für den Mantel des Körpers, und der Schwerpunkt desselben ist wiederum in der Mitte der Axe, welche die Schwerpunkte nicht der Flächen, sondern der Umkreise der Basen verbindet.

Betrachtet man nicht allein den Mantel des Körpers, sondern seine ganze Oberfläche, so kommen noch beide Basen hinzu. Da aber diese gleich und vom vorigen Schwerpunkte gleich weit entfernet sind, so verändern sie das Gleichgewicht nicht, und der Schwerpunkt bleibet wie vorher, nämlich in der Mitte der Axe, welche die Schwerpunkte der Perimeter oder Umkreise beider Basen vereiniget.

§. 20.

Der Schwerpunkt eines Parallelepipedons ist in der Mitte desselben, nämlich im Punkte, wo drei Diagonal-Ebnen desselben einander schneiden; oder wo drei Ebnen einander schneiden, wovon jede zwei entgegengesetzte Flächen des Körpers halbiret; oder er ist in der Mitte der geraden Linie, welche

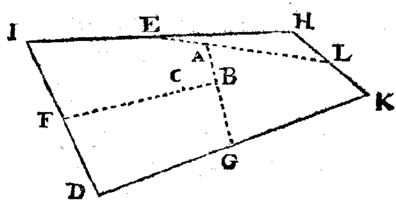
che die Mittelpunkte zweier entgegengesezter Flächen verbindet. Denn alle diese Bestimmungen geben einen und denselben Punkt.

Daß aber dieser Punkt wirklich der Schwerpunkt sei, erhellet daraus, daß ein Parallelepipedon nichts anders ist, als ein viereckigtes Prisma, auf welches also der vorhergehende Beweis passet. Gedachter Beweis gilt nicht nur von geraden, sondern auch von schiefen Prismen, folglich nicht nur von rechtwinklichen, sondern auch von schiefwinklichen Parallelepipeden.

§. 21.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt des Umfanges jeder geradlinichten Figur finden.



Auflösung.

Nimm die Mittelpunkte L und E zweier Seiten der Figur, ziehe die steife (nicht schwere) Linie LE, und theile sie in A, so daß die Theile AE und AL sich umgekehrt verhalten, wie HI und HK. Aus A ziehe die steife Linie AG, nach der Mitte der KD, und theile sie in B, so daß BA zu BG sich umgekehrt verhalte wie (HK + HI) zu KD.

Aus

Aus B ziehe die steife Linie BF nach der Mitte von DI, und bestimme den Punkt C, so daß BC zu CF sich umgekehrt verhalte wie (HK + HI + KD) zu DI, so ist C der gemeinsame Schwerpunkt der Linien HK, HI, KD, DI, und folglich des Umfanges der Figur. Dieses ist im Grunde das nämliche Verfahren, welches schon (§ 3 u. 9) beobachtet worden, nur daß hier die Linien des Umfanges als Gewichte betrachtet werden, welche sich wie die Längen der Linien verhalten.

Hier könnte man vielleicht fragen, wie die Theilung der steifen Linien geometrisch geschehen könnte, so zum Exempel daß

$$HK : HI :: AE :: AL$$

Aus dieser Proporzion folget

$$(HK + HI) : HI :: (AE + AL) : AL$$

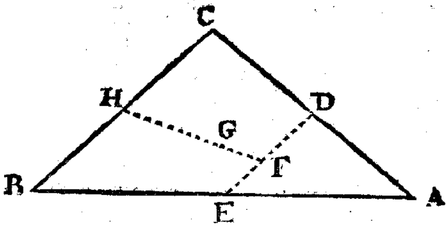
oder $(HK + HI) : HI :: LE : AL$

Es müssen demnach HK und KI in eine gerade Linie zusammengesetzet werden; und dann wird, wie aus der Geometrie bekannt ist, zu den drei ersten Linien der Proporzion die vierte Proporzional-Linie gesuchet, welche AE ist, und den Punkt A bestimmt. Eben so ohngefähr werden die Punkte B und C geometrisch gefunden.

Obgleich hier nur eine vierseitige Figur zum Beispiele genommen worden, so siehet man leicht, daß Verfahren und Beweis sich auf alle möglichen geradlinichten Figuren ausdehnen lassen.

Auch auf den Umfang eines irregulären Dreiecks läßt sich das nämliche Verfahren anwenden. Halbire AC in D AB in E. Ziehe DE. Theile DE, so daß DF : FE ::

(Siehe die folgende Figur.)

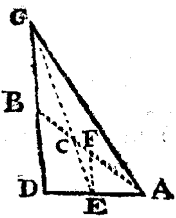


AB : AC. Halbire CB in H. Ziehe FH, und theile diese in G, so daß GH : FG :: (AC + AB) : BC, so ist G der Schwerpunkt des Umfanges vom Dreieck.

§. 22.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt der Fläche eines Dreiecks finden.



Auflösung. Ziehe im Dreieck zwei gerade Linien GE und AB, deren jede aus einem Winkel ausgehet, und die Gegenseite desselben halbiret. Der Punkt C, wo diese beiden Linien einander schneiden, ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

Denn man stelle sich vor, das Dreieck bestehe aus unendlich vielen schweren Linien, allen mit AD parallel, so halbiret GE alle diese Linien, folglich gehet sie durch ihre Schwer-

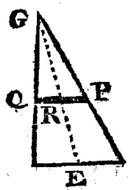
Schwerpunkte, folglich auch durch den Schwerpunkt des Dreiecks. Stellet man sich ferner vor, die Linien, woraus das Dreieck bestehet, seien alle mit GD parallel, so muß sich auch der Schwerpunkt in der Linie AB befinden. Folglich ist er in C, wo GE und AB einander schneiden.

Zusatz. Man kann auch folgende Regel geben. Ziehe GE aus einem Winkel bis zur Mitte der Gegenseite. Mache $GC = \frac{2}{3}$ oder $EC = \frac{1}{3}$ von GE, so ist ebenfalls der Schwerpunkt bestimmt. Zum Beweise, ziehe EF mit BD parallel, so ist AE zu AD wie EF zu DB, oder da AE zu AD wie 1 zu 2, so ist EF zu BD wie 1 zu 2. Und da $BD = BG$, so ist auch EF zu BG wie 1 zu 2.

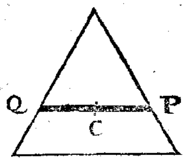
In den ähnlichen Dreiecken FEC, BGC ist EF zu BG wie EC zu CG; da nun EF zu BG wie 1 zu 2, so ist auch EC zu CG wie 1 zu 2. Wird demnach EG in drei gleiche Theile getheilet, so enthält EC einen derselben, und EG CG
zwei, das heißt, es ist $EC = \frac{1}{3} EG$ und $CG = \frac{2}{3} EG$.

Anmerkung. Man könnte leicht auf den Gedanken kommen, daß C auch der Schwerpunkt des Umfanges vom Dreieck sein müsse. Denn, könnte man sagen: ich darf mir ja nur die Linien, woraus das Dreieck bestehet, als bloß steife Linien vorstellen, deren Endpunkte nur schwer sind, so wird alles wie vorher erfolgen, es wird sowohl AB als EG den Umfang im Gleichgewicht halten.

Dieses wäre aber ein Trugschluß.



Es sei PQ (vor. Fig.) eine der schweren Linien, woraus die Fläche des Dreiecks bestehet, so hat diese schwere Linie eine unendlich kleine Breite, und macht eigentlich ein Trapez. Nun kann man sich zwar vorstellen, daß der Schwerpunkt R in der Mitte dieses Trapezen liege; kömmt es aber auf die Enden P und Q desselben an, so sind solche augenscheinlich ungleich, da sie eine ungleiche Schiefe haben. Betrachtet man nun die Linie oder vielmehr das Trapez PQ als eine bloß steife Linie, so kann man nicht sagen, daß ihre Enden P und Q gleiches Gewicht haben, folglich findet sich der Schwerpunkt beider Theilchen P und Q des Umfanges nicht in der Mitte der PQ. Ein anderes ist es, wenn die Theilchen gleiche Neigung haben, wie z. E. im gleichschenklichten Dreieck.



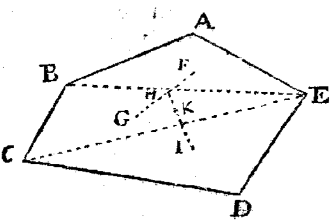
Hier ist in der That die Mitte C der PQ der gemeinsame Schwerpunkt der Theilchen P und Q des Umfanges. Und dieses trifft bei allen symmetrischen Figuren ein. Auf diese Art muß auch dasjenige verstanden werden, was von den Umfängen aller regulären Figuren gesaget worden (§. 16.) Auch bei den dünnen Ebenen, woraus die Körper bestehen, muß die nämliche Bemerkung gemachet werden. Deren Enden sind kleine Flächen-Theile, die nur alsdann einander in gleichen Entfernungen das Gleichgewicht halten, wenn die gegenüber stehenden Theilchen gleiche Neigung haben, und folglich gleich groß sind.

Für irreguläre Dreiecke und überhaupt irreguläre Figuren muß man folglich den Schwerpunkt des Umfanfanges so bestimmen, wie im vorigen Paragraph gelehret worden.

§. 23.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt der Fläche eines irregulären Vielecks finden.



Auflösung.

Es sei gegeben das irreguläre Fünfeck ABCDEA. Theile es in Dreiecke. Bestimme die Schwerpunkte F, G, I aller Dreiecke. Ziehe FG und theile sie so in H, daß HF zu HG sei wie △EBC zu △EAB, zu welchem Ende die Flächen der Dreiecke berechnet werden müssen. Ziehe HI und theile sie so in K, daß IK zu HK sei, wie (△ABE†△BCE) zu △EDC, so ist K der gemeinsame Schwerpunkt aller Dreiecke, und folglich des Fünfecks. So gehet man weiter, wenn das Vieleck mehr Seiten hat, und folglich mehr Dreiecke enthält. Denn, da der Schwerpunkt jedes Dreiecks das Gewicht desselben in sich vereiniget, so kömmt es nur darauf an, den gemeinsamen Schwerpunkt der schweren Punkte F, G, I zu finden. (§ 9.)

Wir haben angenommen, daß die Flächen der Dreiecke berechnet werden müssen. Will man aber bloß geometrisch und ohne Rechnung verfahren, so muß man die Dreiecke alle in Parallelogramme von gleicher Höhe verwandeln, wie die Geometrie lehret. Dann verhalten sich dieselben wie ihre Basen, und diese können anstatt der Flächen in den Proporzionen gebrauchet werden.

Eine andere Auflösung.

Ist die Figur ein Trapezium, so theile es in zwei Dreiecke, suche die Schwerpunkte derselben, und verbinde sie vermittelst einer geraden Linie, so wird der Schwerpunkt in derselben liegen. Nun theile das Trapezium wiederum auf eine andere Art, nämlich, durch die andere Diagonallinie auch in zwei Dreiecke. Suche wiederum ihre Schwerpunkte, und verbinde sie vermöge einer geraden Linie, so liegt auch in dieser der Schwerpunkt. Folglich ist er im Punkte, wo beide Linien einander schneiden.

Ist die Figur fünfeckig, so theile sie vermittelst einer Diagonallinie in ein Dreieck und ein Trapezium. Suche die Schwerpunkte beider Theile und verbinde sie mittelst einer geraden Linie. Ziehe im Fünfeck eine andere Diagonale, wodurch es ebenfalls in ein Dreieck und ein Trapezium getheilet wird. Suche auch die Schwerpunkte beider Theile, und verbinde sie durch eine gerade Linie, so wird diese die vorhergehende schneiden, und dadurch den Schwerpunkt bestimmen.

Der Schwerpunkt eines Sechsecks wird gefunden, wenn man es auf zweierlei Art, jedesmal in zwei Trapezen eintheilet und die Schwerpunkte derselben vermittelst geraden Linien verbindet. Der Punkt wo beide gerade Linien einander schneiden, ist der Schwerpunkt der ganzen Figur.

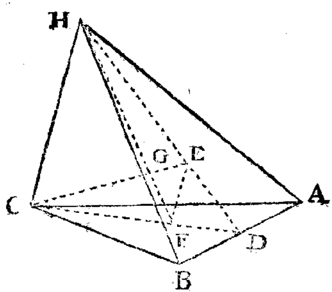
Das Siebeneck wird in ein Trapez und ein Fünfeck getheilet, und dieses auf zweierlei Weise. Das Achteck wird

wird ebenfalls zweimal getheilet, jedesmal in zwei Fünfecke, u. s. w.

§. 24.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer dreieckigten Pyramide bestimmen.



Auflösung.

Vom Scheitel H ziehe man die gerade Linie HF bis zum Schwerpunkte F der Grundfläche. Man schneide von dieser geraden Linie den vierten Theil ab, von unten an gerechnet, nämlich FG $= \frac{1}{4}$ FH, so ist der Schwerpunkt G am Endpunkte dieses vierten Theiles.

Um dieses zu beweisen, nehme man die Mitte D der Linie AB, ziehe DC und DH bis zu den Scheiteln der Dreiecke ACB, AHB, und mache DF $= \frac{1}{3}$ DC, DE $= \frac{1}{3}$ DH, so sind F und E die Schwerpunkte der Dreiecke ACB, AHB. Stellet man sich nun vor, die Pyramide bestehe aus unendlich vielen sehr dünnen, und mit ACB parallelen Dreiecken, so wird die Linie HF durch alle Schwerpunkte derselben gehen, weil alle von HF auf die näm-

 liche

liche Art wie $\triangle ABC$ geschnitten werden. Folglich lieget der Schwerpunkt der Pyramide in der Linie HF. Stellet man sich vor, die Pyramide bestehe aus lauter Dreiecken, die mit AHB parallel sind, so muß aus dem nämlichen Grunde der Schwerpunkt der Pyramide in der Linie EC liegen.

Die Linien DC, DH, HC machen ein Dreieck, und liegen folglich in einer Ebne. EC und HF liegen in derselben Ebne. Also schneiden EC und HF einander irgendwo in G, und G muß der Schwerpunkt der Pyramide sein, weil dieser Punkt sowohl in der Linie HF als auch in der Linie EC lieget.

Nun ziehe man FE, so ist FE mit HC parallel, weil im Dreiecke DHC die DE der dritte Theil von DH und auch DF der dritte Theil von DC ist, folglich die Seiten DH und DC von EF nach gleichem Verhältnisse geschnitten sind.

Ferner sind FGE, HGC ähnliche Dreiecke, weil bei G die Scheitel-Winkel gleich sind, und weil die Seiten HC und FE gleichlaufend sind. Folglich ist

$$FG : GH :: FE : CH :: DF : DC :: 1 : 3.$$

Da also $FG : GH :: 1 : 3,$

so ist $FG : (FG + GH) :: 1 : (1 + 3)$

oder $FG : FH :: 1 : 4$

daher $FG = \frac{1}{4} FH.$

§. 25.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer jeden Pyramide, oder eines Kegels finden.

Auflö-

Auflösung. Von der Spitze der Pyramide oder des Kegels ziehe man die Axe derselben bis zum Schwerpunkte der Grundfläche, so ist derjenige Punkt, welcher $\frac{1}{4}$ der Axe von unten an abschneidet, allemal der Schwerpunkt.

Denn, ist die Grundfläche ein reguläres oder irreguläres Vieleck, so theile man es in lauter Dreiecke, und stelle sich vor, die Pyramide bestehe aus lauter dreieckigten Pyramiden.

Von der gemeinsamen Spitze ziehe man gerade Linien, bis zu den Schwerpunkten der Dreiecke, woraus die Grundfläche bestehet.

Von jeder dieser Linien schneide man von unten an $\frac{1}{4}$ ab, so hat man alle besondere Schwerpunkte der dreieckigten Pyramiden. Ferner, da alle gedachte gerade Linien nach demselben Verhältnisse geschnitten sind, nämlich wie 1 zu 3, so liegen alle besondere Schwerpunkte in einer Ebne, welche mit der Grundfläche parallel ist. Ist die Grundfläche ein Zirkel, so gilt der nämliche Beweis, nur daß anstatt einer endlichen Anzahl dreieckigter Pyramiden, unendlich viele gedacht werden müssen. Gedachte Ebne wird dadurch bestimmt, daß sie durch den Punkt gehet, der von der Höhe der Pyramide $\frac{1}{4}$ von unten an abschneidet. Denn die Linie, welche die Höhe mißt, wird von der Ebne nach demselbigen Verhältnisse geschnitten, wie die übrigen, die vom Scheitel bis zur Grundfläche gehen. Nun stelle man sich vor, der spitzige Körper (es sei Pyramide oder Kegel) bestehe aus lauter dünnen Ebnen, die mit der Grundfläche gleichlaufend sind, so wird diejenige Linie, welche vom Scheitel bis zum Schwerpunkt der Grundfläche gehet, auch durch die Schwerpunkte aller Ebnen gehen, woraus die Pyramide bestehet, weil sie alle von derselben auf ähnliche Art geschnitten werden.

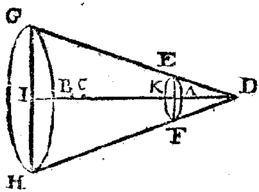
Diese

Diese Linie nun, oder Axe, wird von gemeldeter Ebne, worin alle einzelne Schwerpunkte liegen, ebenfalls am Ende ihres ersten Viertels, von unten an, geschnitten. Und in dem Punkte, wo dieses geschiehet, lieget demnach der Schwerpunkt des ganzen Körpers.

§. 26.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer abgekürzten Pyramide oder eines abgekürzten Kegels finden.



Auflösung. Es sei zu finden der Schwerpunkt des abgekürzten Kegels EFHG. (Wir nehmen an, es sei ein Kegel, es kann aber das nämliche Verfahren von der Pyramide verstanden werden). Es sei C der Schwerpunkt des vollständigen Kegels DGH, so muß der Kegel ruhen, wenn der Punkt C unterstützet wird. Nun stelle man sich die Axe des Kegels als eine steife Linie vor, auf welcher der Kegel aufgespießt ist. Man schneide ihn durch in EF, so daß die Fläche EF mit der Grundfläche GH parallel sei. Da das Durchschneiden sonst nichts verändert hat, so muß auch noch jetzt der Punkt C beide Theile DEF und FEGH in Gleichgewicht halten.

Es sei A der besondere Schwerpunkt des Theiles DEF, und es sei B der besondere Schwerpunkt des Theiles FEGH,

FEGH, so kann man sich die steife Linie AB als eine Wage vorstellen, die in C aufgehänget ist, und welche die Gewichte DEF und FEGH, welche an den Punkten A und B befestiget sind, in Gleichgewicht hält. Folglich muß sein

$$FEGH : DEF :: AC : CB$$

das heißt: das verkürzte Stück verhält sich zum abgeschnittenen Stücke, wie die Entfernung zwischen dem Schwerpunkte des vollständigen Kegels und dem Schwerpunkte des abgeschnittenen Stückes, sich verhält zur Entfernung zwischen dem Schwerpunkte des vollständigen Kegels und des verkürzten Stückes.

Nun lassen sich FEGH und DEF geometrisch berechnen; AC (= DC — DA) läßt sich aus der vorigen Aufgabe bestimmen. Folglich kann man in jedem Falle den vierten Satz CB des Verhältnisses finden.

Zusatz. Es sei der gegebene Block ein Theil eines geraden Kegels, es sei der größere Durchmesser GH $= a$, der kleinere EF $= c$, die Höhe KI $= b$, so wissen wir aus der Geometrie, daß

$$FEGH = \frac{(a^3 - c^3) b \pi}{12 (a - c)}$$

$$DEF = \frac{c^3 \; b \pi}{12 (a - c)}$$

$$DI = \frac{a b}{a - c}$$

$$DK = \frac{b c}{a - c}$$

folg:

folglich ist $DC = \frac{3}{4} DI = \frac{3ab}{4(a-c)}$

$$DA = \frac{3}{4} DK = \frac{3bc}{4(a-c)}$$

folglich $AC = DC - DA = \frac{3ab}{4(a-c)} - \frac{3bc}{4(a-c)}$

$$= \frac{3(a-c)b}{4(a-c)}$$

$$= \frac{3b}{4} = \frac{3}{4} b$$

Setzen wir nun die gefundenen Werthe in die Proporzion

$$FEGH : DEF :: AC : CB$$

so ist $\frac{(a^3 - c^3) b \pi}{12(a-c)} : \frac{c^3 b \pi}{12(a-c)} :: \frac{3b}{4} : CB$

oder $(a^3 - c^3) : c^3 :: \frac{3}{4} b : CB$

daher $CB = \frac{3b c^3}{4(a^3 - c^3)}$

Nun ist $CI = \frac{1}{4} DI = \frac{ab}{4(a-c)}$

und $BI = CI - CB = \frac{ab}{4(a-c)} - \frac{3bc^3}{4(a^3 - c^3)}$

$$= \frac{b}{4}\left(\frac{a}{a-c} - \frac{3c^3}{a^3 - c^3}\right)$$

und diese Formel giebt die Entfernung des Schwerpunktes von der unteren oder größeren Base des abgekürzten Kegels.

§. 27.

§. 27.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines jeden Körpers bestimmen.

Auflösung. Hat der Körper ebne Flächen, so wähle man einen Punkt in demselben, und stelle sich vor, dieser Punkt sei die gemeinsame Spitze der Pyramiden, woraus der Körper bestehet, und die ihre Grundflächen auswendig haben. Man berechne den körperlichen Inhalt jeder Pyramide, und suche auch ihren Schwerpunkt. Man stelle sich nun diese Schwerpunkte als bloße schwere Punkte vor, wovon jeder das Gewicht seiner Pyramide enthält.

Nun suche man den gemeinsamen Schwerpunkt aller dieser einzelnen schweren Punkte, wie (§ 3) gelehret worden, so hat man den Schwerpunkt des Körpers.

Hat der Körper nicht ebene, sondern krumme Flächen, so muß man die Oberfläche in solche Theile eintheilen, die für Ebnen gehalten werden können, und deren Krümmung nur wenig beträgt; und dann wie vorher verfahren.

Ob nun gleich ein solches Verfahren in der Theorie seine Richtigkeit hat, so ist es doch kaum anzuwenden, weil man in das innere des Körpers nicht eindringen kann. Daher wird es besser sein zu demjenigen praktischen Verfahren seine Zuflucht zu nehmen, welches oben (§ 5) angeführt worden.

§. 28.

Aufgabe.

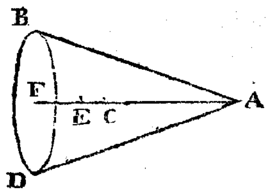
Den Schwerpunkt der Oberfläche einer Pyramide oder eines Kegels bestimmen.

Auf-

Auflösung. Wenn man die Grundfläche aus der Acht läßt, so bestehet der Mantel einer Pyramide aus lauter Dreiecken. Bildet man sich demnach eine Ebne ein, welche die Höhe der Pyramide, von unten nach oben, wie 1 zu 2 theilet, und mit der Grundfläche gleichlaufend ist, so wird sie durch alle besondere Schwerpunkte der Dreiecke und folglich durch den Schwerpunkt des Mantels gehen. Ist der Körper ein Kegel, so muß das Gesagte von unendlich kleinen Dreiecken verstanden werden.

Ferner, wenn man sich vorstellet, der ganze Mantel bestehe aus abgekürzten Pyramidenmänteln, oder abgekürzten Kegelmänteln, von unendlich kleiner Höhe, so wird diejenige Linie, welche vom Scheitel durch den Schwerpunkt des Umfanges der Grundfläche gehet, auch durch die Schwerpunkte aller übrigen kleinen Reifen oder Gürtel gehen. Folglich ist der Schwerpunkt da, wo diese Linie von vorher gedachter Ebne geschnitten wird. Also, wenn man den Schwerpunkt des Mantels einer Pyramide oder eines Kegels finden will, so muß man eine gerade Linie vom Scheitel bis zum Schwerpunkte des Umkreises der Grundfläche ziehen. Diese Linie wird in 3 gleiche Theile getheilet; der unterste Theilungspunkt ist zugleich der Schwerpunkt.

Soll nun die Grundfläche mit in Anschlag kommen, so suche ich erstlich den Schwerpunkt C des Mantels, be-



rechne

rechne auch den Flächen-Inhalt desselben. Ferner berechne ich den Inhalt der Grundfläche BD. Nun betrachte ich die Linie CF als eine Wage, welche in C mit dem Mantel ABD und in F mit der Grundfläche BD belastet ist, und suche den Ruhepunkt durch die bekannte Proporzion

$$BD : ABD :: CE : EF$$

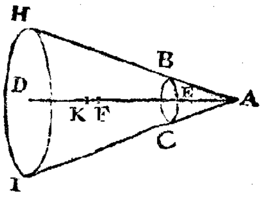
$$(BD + ABD) : (ABD) :: (CE + EF) ; (EF)$$

oder $(BD + ABD) : (ABD) :: CF : EF$

das heißt: die ganze Oberfläche verhält sich zum bloßen Mantel, wie die Entfernung des Schwerpunktes der ganzen Oberfläche bis zur Grundfläche, sich verhält zur Entfernung des gesuchten Schwerpunktes zur selbigen Grundfläche. Obgleich die Figur nur einen Kegel vorstellet, so gilt das nämliche doch auch von der Pyramide.

§. 29.

Den Schwerpunkt der Oberfläche einer abgekürzten Pyramide oder eines abgekürzten Kegels bestimmen.

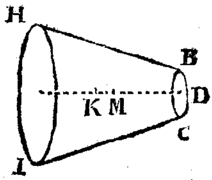


Auflösung. Ist nur allein vom Mantel BHICB, ohne die beiden Grundflächen HI und BC die Rede, so merke erstlich den Schwerpunkt F des ganzen Mantels AHI, und den Schwerpunkt E des Mantels ABC. Berechne

rechne geometrisch so wohl den Mantel ABC, als auch den Mantel BHICB des abgekürzten Kegels. Stelle dir EK als eine Wage vor, die in E die Oberfläche ABC, und in K die Oberfläche BHIC trägt, und ihren Ruhepunkt in F hat, suche die Entfernung FK vermittelst der Proportion.

$$BHIC : ABC :: FE : FK$$

Soll eine der Endflächen mit in Anschlag kommen, so muß sie als ein neues hinzukommendes Gewicht betrachtet werden.



Zum Exempel. Es sei K der gefundene Schwerpunkt der äußeren Oberfläche des Bechers BHIC, und es komme noch der Boden BC hinzu, so trägt der Punkt K den Mantel oder die runde Fläche, und der Punkt D trägt den Boden. Es sei M der verlangte Schwerpunkt so ist

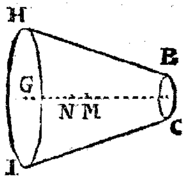
$$BC : BHIC :: KM : MD$$

$$(BC + BHIC) : BHIC :: (KM + MD) : MD$$

$$(BC + BHIC) : BHIC :: DK : MD$$

Diese Proporzion bestimmt den Punkt M. Wäre der Boden HI anstatt BC gegeben, so wäre das Verhalten mit diesem ähnlich.

Sollen beide Böden mit in Anschlag kommen, so suche erstlich den Punkt M, welcher den Mantel BHIC sammt dem



dem Boden BC in Gleichgewicht hält, und sage,

$$HI : (BC + BHIC) :: MN : NG$$

oder

$$(HI + BC + BHIC) : (BC + BHIC) :: (MN + NG) : NG$$

oder

$$(HI + BC + BHIC) :: (BC + BHIC) :: MG : GN$$

Diese Proporzion bestimmet den Punkt N.

§. 30.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt der Oberfläche eines jeden Körpers finden.

Auflösung. Hat der Körper gerade Flächen, so berechne die Größen derselben und suche deren Schwerpunkte. Betrachte diese wie schwere Punkte die mit den Gewichten der Flächen (welche Gewichte durch die Größen der Flächen vorgestellet werden) beladen sind. Suche deren gemeinsamen Schwerpunkt (§ 3) so ist dieses der verlangte Schwerpunkt.

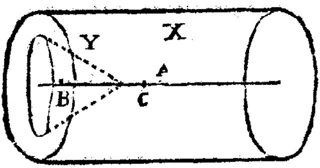
Sind die Flächen krumm, so theile sie in solche Theile, die für gerade geachtet werden können, und verfahre wie vorher.

Ist der Körper hohl und nur die dünne Oberfläche desselben vorhanden, so kann man auch auf eine praktische Art verfahren, wie bei § 5 gelehret worden; und wenn man dabei zwei dünne Nadeln gebrauchet, so werden dieselben in dem hohlen Raume zusammen treffen, und den Schwerpunkt bestimmen.

§. 31.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines jeden ausgehöhlten Körpers finden.



Auflösung. Es sei C der Schwerpunkt des ganzen Körpers X + Y, bevor er ausgehölet worden, B der Schwerpunkt des ausgeschnittenen Stückes Y, und A der Schwerpunkt des übrig bleibenden Stückes X. Stelle dir vor, es sei erstlich das übrig bleibende Stück vorhanden gewesen, und solches habe auf dem Punkte A geruhet, es sei aber das andere Stück B hinzugekommen, und ruhe auf dem Punkte B. Verfahre als wenn du den gemeinsamen Schwerpunkt C beider Stücke suchen solltest, nämlich sage. Es verhält sich

$$X : Y :: BC : AC$$

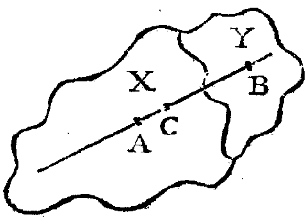
$$X : (X + Y) :: BC : (BC + AC)$$

$$X : (X + Y) :: BC : BA$$

Wäre

Wäre nun BA bekannt, so ließe sich aus dieser Proporzion BC finden. Da aber der Fall umgekehrt ist, so läßt sich ebenfalls BA finden.

Anmerkung I. Hierbei merke man, daß die drei Schwerpunkte, nämlich des ganzen Körpers, des abgenommenen Stückes, und des übrig bleibenden, nothwendig alle drei in einer geraden Linie liegen.

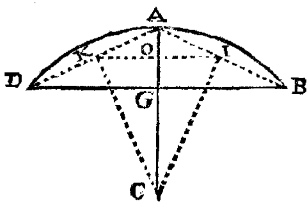


Denn es sei A der Schwerpunkt des Körpers X. Nun komme der Körper Y hinzu, dessen Schwerpunkt in B ist, so lieget der gemeinsame Schwerpunkt C in der Linie AB, wie aus allem Vorhergehenden zur Gnüge bekannt ist. Betrachtet man nun X + Y als einen einzelnen Körper, und nimmt davon den Theil Y ab, so ist klar, daß der Schwerpunkt B des abgenommenen Stückes mit dem Schwerpunkte C des ganzen Körpers und dem Schwerpunkte A des übrigen Theiles X in einer geraden Linie lieget.

Anmerkung II. Ein ähnliches Verfahren, wie in der Auflösung angegeben worden, kann auch dienen, um den Schwerpunkt einer Oberfläche, einer Ebne, eines Linien-Systems zu finden, wenn von diesen Größen etwas abgenommen worden.

§. 32.

Wir haben bisher vorsezlich noch nichts von den Schwerpunkten des Zirkels und der Kugel gesagt, um dieselben jezt insbesondere zu betrachten. Wir wollen uns demnach vornehmen, erstlich den Schwerpunkt eines bloßen Zirkel-Bogens zu bestimmen.

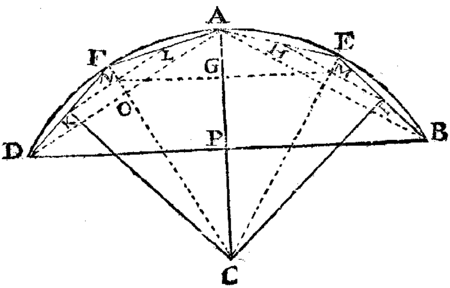


Zu diesem Ende nehmen wir an, es sei BAD ein Zirkel-Bogen, welcher im Punkte A halbiret ist. Es ist C der Mittelpunkt, und BD die Sehne. Die gleichen Sehnen AB und AD halbiren wir in I und K. Der Punkt O halbiret nun die Linie IK, lieget im Durchmesser AC, und ist der Schwerpunkt des Systems beider Sehnen AB und AD. Wenn wir nun CK ziehen, so sind die rechtwinklichten Dreiecke ACK, CKO, ADG einander ähnlich. Folglich ist

$$\begin{aligned} CK, CO &:: AD, DG \\ &:: 2AD, 2DG \\ &:: (AB + AD), BD \end{aligned}$$

Folglich verhält sich die Summe beider Sehnen AB und AD zur Sehne BD, wie der Kosinus CK der Hälfte des einen Bogens AD, zur Entfernung CO vom Schwerpunkte des Systemes beider Sehnen bis zum Mittelpunkte, woraus der ganze Bogen beschrieben worden.

Es



Es sei nun ein Bogen BAD in den Punkten E, A und F in vier gleiche Theile getheilet. Durch die Mitten der Sehnen ziehe man IH und LK. Da diese Linien mit den Sehnen AB und AD parallel sind, welches leicht einzusehen ist, so werden sie in den Punkten M und N durch die Halbmesser CE und CF halbiret. Man ziehe MN, so ist diese Linie auf dem Halbmesser AC senkrecht, und folglich mit der Sehne BD parallel. Denn es wird nicht schwer zu beweisen sein, daß die Dreiecke CGM und CGN ähnlich sind, und daß folglich bei G rechte Winkel entstehen. Dieses vorausgesezet, so befindet sich in G der gemeinsame Schwerpunkt der vier Sehnen BE, EA, AF und FD. Nun ziehe man CK, so sind die Dreiecke CNK und FDO ähnlich. Denn der kleinste Winkel eines jeden wird bestimmet durch die Hälfte der Grade eines der vier gleichen Bogen. Folglich ist

$$\begin{aligned} CK, CN &:: DF, DO \\ &:: 2DF, 2DO \\ &:: (DF + FA), DA \end{aligned}$$

Folglich ist $CK, (DF + FA) :: CN, DA$.

Desgleichen sind die Dreiecke GCN und ADP einander ähnlich, weil in jedem ein Winkel ist, der durch die Hälfte der gleichen Bogen AB und AD bestimmet ist. Also ist ferner

$$CN, DA :: CG, DP$$

da nun $CN, DA :: CK, (DF + FA)$

so ist $CK, (DF + FA) :: CG, DP$

oder $CK, CG :: (DF + FA), DP$

$$:: (2DF + 2FA), 2DP$$

$$:: (BE + EA + AF + FD), BD$$

Folglich verhält sich die Summe der Sehnen der vier gleichen Bogen zur Sehne des ganzen Bogens, wie der Kosinus CK der Hälfte eines dieser Bogen, zur Entfernung CG vom Mittelpunkte bis zum Schwerpunkte des Systemes aller vier Bogen.

Der nämliche Beweis läßt sich auf jedem Bogen anwenden, welcher in 8, 16, 32 gleiche Theile u. s. w. eingetheilet ist, indem man die Anzahl der Theile immer verdoppelt. Gehet man auf diese Art immer weiter bis ins Unendliche, so ist der ganze Bogen die Gränze der Summe aller kleinen Sehnen, der Halbmesser des Zirkels ist die Gränze des immer zunehmenden Kosinus jedes kleinen halben Bogens. Da sich nun die Gränzen eben so verhalten, wie die veränderlichen Größen, deren Gränzen sie sind, so folget: daß die Länge eines Bogens sich zur Länge seiner Sehne verhält, wie der Halbmesser des Zirkels, zur Entfernung vom Mittelpunkte bis zum Schwerpunkte des Bogens.

§. 33.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Zirkelbogens finden.

Auflö-

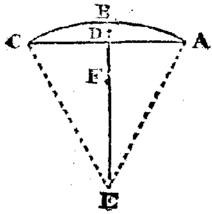
Auflösung. Wenn der Halbmesser und die Grade des Bogens gegeben sind, so muß vor allen Dingen die Länge des Bogens berechnet werden. Um dieses zu verrichten, so verfahre man folgendermaßen. Man erinnere sich, daß, wenn der Halbmesser 1 ist, der halbe Umkreis durch folgende Zahl ausgedrücket wird: 3,14159. Multipliziret man diese Zahl mit dem gegebenen Halbmesser, so bekömmt man den halben Umkreis für diesen Halbmesser. Nun sage man: wie sich 180 Grad zu den gegebenen Graden verhalten, so verhält sich die Länge des halben Umkreises zur Länge des gegebenen Bogens.

Ferner muß die Sehne des gegebenen Bogens bestimmet werden. Diese findet man, wenn man in den Sinus-Tafeln die Hälfte der gegebenen Grade aufsuchet, und den dabei stehenden Sinus verdoppelt. Man muß aber bedenken, daß die gefundene Sehne eigentlich für den Halbmesser der Tafeln berechnet ist. Man sage also: Wie der Halbmesser der Tafeln sich verhält zum gegebenen Halbmesser, so verhält sich die gefundene Sehne zur verlangten.

Nach diesen Vorbereitungen bleibet also nichts übrig, als daß man die im vorigen Paragraph bewiesene Proporzion anwende.

Es sei zum Exempel ABC ein Bogen von 55 Grad, in einem Zirkel, dessen Halbmesser 7 Fuß hält. Es soll der Schwerpunkt D dieses Bogens gefunden werden. Man halbire den Bogen in B, und ziehe den Halbmesser

(Siehe die folgende Figur.)



EB, so ist aus dem Beweise des vorigen Paragraphs klar, daß der Schwerpunkt D sich in der Linie EB befindet, und daß ABC, AC :: EB, ED.

Um nun ABC in Fuß zu bestimmen, so sage man: 180 Grad verhalten sich zu 55 Grad, wie 3,14159 zum Bogen ABG für den Halbmesser 1. Vermöge der Regeldetri findet man 0,95993. Und multipliziret man noch mit dem Halbmesser 7, so ist ABC = (0,95993) × 7. Um die Sehne AC zu bestimmen, so suche man den Sinus von $27\frac{1}{2}$ Grad, und verdoppele ihn, so kömmt 92350, als die Sehne von 55 Grad für den Halbmesser 100000. Nun sage man, wie der Halbmesser 100000 sich verhält zum Halbmesser 7, so verhält sich 92350 zur Sehne von 55 Grad für den Halbmesser 7. Die Sehne AC wird also sein

$$\frac{92350 \times 7}{100000} = (0,92350) \times 7$$

Es ist aber 0,92350 die Sehne von 55 Grad für den Halbmesser 1. Die Sehne AC ist demnach die Sehne von 55 Grad für den Halbmesser 1, mit dem gegebenen Halbmesser 7 multipliziret.

Da nun der Bogen ABC und die Sehne bekannt sind, so sage man vermöge der Regeldetri: wie sich (0,95993) × 7

$\times 7$ verhält zu $(0{,}92350) \times 7$, so verhält sich der Halbmesser 7 zur Entfernung ED. Es wird demnach

$$ED = \frac{(0{,}92350) \times 7}{(0{,}95993) \times 7} \times 7 = \frac{0{,}92350}{0{,}95993} \times 7$$
$$= 0{,}96205 \times 7$$
$$= 6{,}73435 \text{ Fuß}$$

Woraus man siehet, daß der Schwerpunkt 6,73435 Fuß vom Mittelpunkte ist.

Anmerkung. Da in den beiden ersten Sätzen der Faktor 7 vorkömmt, so kann er gänzlich weggelassen werden; man brauchet also nur so wohl den Bogen als auch die Sehne für den Halbmesser 1 berechnen, und dann die gehörige Proporzion gebrauchen. Oder, welches einerlei sein wird, man berechnet die verlangte Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte, als wenn der Halbmesser 1 wäre, und multiplizitet sie hernach mit dem gegebenen Halbmesser.

§. 34.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Zirkel-Ausschnittes finden.

Auflösung. Man muß den Schwerpunkt eines Bogens finden, welcher eben so viele Grade habe, als der Bogen, womit der Ausschnitt begränzet ist, aber dessen Halbmesser nur $\frac{2}{3}$ des Halbmessers des Ausschnittes sei. Oder, welches einerlei ist, man nimmt auf dem Halbmesser, welcher den Ausschnitt halbiret, einen Punkt, welcher vom Mittelpunkte des Bogens entfernet sei, um $\frac{2}{3}$ des Abstandes

des von selbigem Mittelpunkte bis zum Schwerpunkt desjenigen Bogens, welcher den Ausschnitt begränzet.

Nachdem, zum Beispiele, in der letzten Figur gefunden worden, daß $ED = 0{,}96205 \times 7$ so nehme man $\frac{2}{3}$ von dieser Zahl, nämlich $0{,}64137 \times 7$; diese Zahl drücket nun den Abstand EF aus, zwischen dem Mittelpunkte E und dem Schwerpunkte F des Ausschnittes ABCEA.

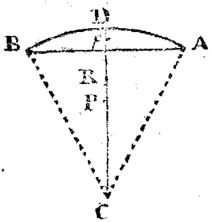
Um dieses zu erklären, stelle man sich vor, der Ausschnitt sei in unendlich viel kleine Ausschnitte eingetheilet, wovon jeder für ein kleines Dreieck gehalten werden könne. So ist der Schwerpunkt jedes dieser Dreiecke um $\frac{2}{3}$ des Halbmessers vom Mittelpunkte entfernet. Alle diese Schwerpunkte machen zusammen einen Bogen, welcher mit demjenigen konzentrisch ist, der den Ausschnitt begränzet, welcher aber nur $\frac{2}{3}$ des ganzen Halbmessers zu seinem Halbmesser hat. Der Schwerpunkt dieses Bogens ist demnach zugleich der Schwerpunkt des ganzen Ausschnittes. Um den Schwerpunkt dieses kleineren Bogens zu finden, müßte man sagen: wie sich die Länge dieses kleineren Bogens verhält zur Länge seiner Sehne, so verhält sich sein Halbmesser zum Abstande des Schwerpunkts vom Mittelpunkte. Da aber beide Bogen ähnlich oder von gleich viel Graden sind, so verhält sich der kleinere Bogen zu seiner Sehne, wie der größere zu seiner Sehne. Also kann man auch sagen, der größere Bogen verhalte sich zu seiner Sehne, wie der Halbmesser des kleineren Bogens zum verlangten Abstande; oder, der größere Bogen verhalte sich zu seiner Sehne, wie $\frac{2}{3}$ seines Halbmessers zum verlangten Abstande. Es verhält sich aber der größere Bogen zu seiner Sehne, wie sein ganzer Halbmesser zum Abstande seines Schwerpunktes vom Mittelpunkte. Woraus dann erhellet, daß der Abstand für den Ausschnitt $\frac{2}{3}$ des Abstandes für den Bogen desselben beträgt.

§. 35.

§. 35.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Zirkel-Abschnittes bestimmen.



Auflösung. Es sei verlanget der Schwerpunkt des Abschnittes ADBA. Man betrachte diesen Abschnitt als einen Theil des Ausschnittes ACBDA, von welchem das Dreieck ABC abgenommen worden. Man suche erstlich den Schwerpunkt P dieses Dreieckes, und den Schwerpunkt R des ganzen Ausschnittes. Es sei nun p der Schwerpunkt des Abschnittes, so betrachte man die Linie Pp als einen Hebel, dessen Ruhepunkt in R ist, der in P ein Gewicht trägt, welches durch die Fläche des Dreiecks ABC vorgestellet wird, und in p ein anderes Gewicht, welches durch den Abschnitt ABDA vorgestellet wird. So verhält sich die Fläche des Abschnittes zur Fläche des Dreiecks wie RP sich verhält zu Rp. Dieses Verhältniß giebt

$$\mathrm{R}p = \frac{\triangle \mathrm{ABC} \times \mathrm{RP}}{\text{Abschnitt ADB}}$$

oder $$\mathrm{R}p = \frac{\triangle \mathrm{ABC} \times \mathrm{RP}}{\text{Ausschnitt ACBDA} - \triangle \mathrm{ABC}}$$

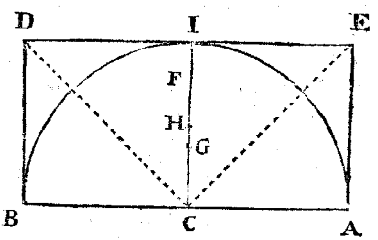
Es

Es sei zum Exempel der Bogen ADB = 55 Grad, und der Halbmesser CD = 1. So findet man, vermöge der vorhergehenden Aufgaben, CP = $\frac{2}{3}$S'$27\frac{1}{2}^g$ = 0,59134, die Fläche des Dreiecks ABC wird erhalten, wenn man die Hälfte der Sehne AB, oder den Sinus des Bogens DB mit den Kosinus des nämlichen Bogens multiplizirет. Dieses giebt $\triangle$ABC = 0,40957. Der Abschnitt ADBA wird gefunden = 0,07039. Nachdem CR vermöge der vorigen Aufgabe bestimmet worden, und davon CP abgezogen worden, so bekömmt man RP = 0,05003. Nun sage man: 0,07039 verhält sich zu 0,40957, wie 0,05003 zu Rp. Die Regeldetri giebt Rp = 0,29103. Folglich Cp = CR + Rp = 0,93240 oder Dp = CD — Cp = 1 — 0,93240 = 0,06760

§. 36.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer halben Kugel finden.



Auflösung. Es sei AB der Durchmesser der halben Kugel, wie auch des umgeschriebenen Zylinders ABDE, so ist zugleich ED, welche eben so groß ist als AB, der Durchmesser der Grundfläche des Kegels ECD. Der Kegel, welcher

welcher den dritten Theil des Zylinders beträgt, hat seinen Schwerpunkt in F, so daß $CF = \frac{3}{4} CI$. Der Zylinder, der am körperlichen Inhalte der Halbkugel nebst dem Kegel gleich ist, hat seinen Schwerpunkt in H, so daß $CH = \frac{1}{2} CI$. Folglich ist $FH = \frac{1}{4} CI$. Man betrachte nun den Schwerpunkt H des Zylinders als einen Ruhepunkt des Hebels FHG, welcher in F das Gewicht des Kegels trägt, und in G das Gewicht der Halbkugel, so verhält sich die Halbkugel zum Kegel, wie HF zu HG. Da nun die Halbkugel doppelt so groß ist als der Kegel, so ist auch HF doppelt so groß als HG. Folglich $HG = \frac{1}{2} HF = \frac{1}{8} CI$. Folglich $CG = CH - GH = \frac{1}{2} CI - \frac{1}{8} CI = \frac{3}{8} CI$ oder $IG = \frac{5}{8} CI$.

Daraus erhellet, daß der Schwerpunkt einer Halbkugel gefunden wird, wenn man die Dicke oder den Halbmesser derselben in 8 gleiche Theile eintheilet, und davon vom Mittelpunkte aus 3 zähler.

Sechs:

Sechstes Hauptstück.

Von den gebräuchlichsten Maschinen.

§. 1.

Was Maschinen, und insbesondere einfache Maschinen sind, ist schon oben (IV H. § 1) erkläret worden. Man kann vorzüglich sieben einfache Maschinen rechnen, nämlich: den Hebel, die Rolle, die Winde, die schiefe Ebne, den Keil, die Schraube, und die Seilmaschine (machine funiculaire). Aus der Verbindung derselben entstehen verschiedene zusammengesezte Maschinen. Da wir den Hebel schon in einem besonderen Hauptstücke betrachtet haben, so wollen wir jezt die übrigen einfachen Maschinen erklären, und bei jeder derselben zugleich die vornehmsten zusammengesezten anzeigen, die daraus entstehen.

§. 2.

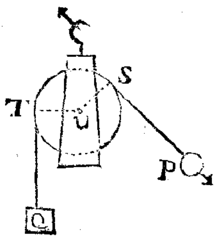
Eine Rolle ist nichts anders als ein Rad von Holz oder Metall, welches sich um eine Axe oder dünne Welle herum drehen läßt. Die Rolle hängt vermittelst ihrer Welle in einem Kloben oder einer Flasche, das heißt, in einem Körper, welcher aus zwei Brettern oder Wänden bestehet, die sich oberhalb der Rolle vereinigen. Der Umfang der Rolle hat eine Rinne oder Vertiefung, worin das Strick lieget, welches über die Rolle gehet und dieselbe herum drehet. Am einen Ende des Strickes wird die Resistenz oder Last befestiget, am anderen Ende wird die Kraft angebracht.

Die

Die Rolle wird fest oder unbeweglich genannt, wenn der Kloben vermittelst eines Hakens oder Nagels an einem Punkte befestiget ist, von welchem er sich nicht entfernen kann. Hingegen eine bewegliche Rolle ist eine solche, an deren Kloben die Last angehänget wird, so daß diese sammt der Rolle ihren Ort verändern kann.

§. 3.

Eine feste oder unbewegliche Rolle verschaffet der Kraft keinen Vortheil, sondern, wenn das Gleichgewicht statt finden soll, so muß die Kraft eben so groß sein als die Resistenz. Denn, gesezt

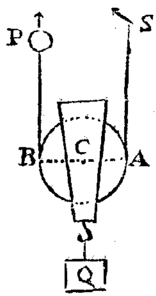


die Mächte P und Q halten einander das Gleichgewicht, vermittelst eines Strickes, welches über eine feste Rolle gehet, so berühret das Strick den Umfang der Rolle in zwei Punkten S und T, und ist senkrecht auf den Halbmessern SU und TU. Man stelle sich demnach die gebrochene Linie SUT als einen Hebel vor, dessen Ruhepunkt in U ist, so erfordert das Gleichgewicht, daß $Q \times TU = P \times SU$, das heißt, es müssen gleiche Produkte heraus kommen, wenn man jede Macht mit ihrer senkrechten Entfernung vom Ruhepunkte multipliziret. Da nun $TU = SU$, so muß auch nothwendig $Q = P$ sein, um daß die Produkte gleich sein können.

Diesen Satz haben wir zwar schon oben (III H. § 25) als einen Grundsatz angenommen. Jedoch war es nicht überflüssig, ihn an diesem Orte noch etwas zu erläutern. Wir wiederholen also was schon angemerket worden, nämlich, daß eine feste Rolle nur dazu dienen kann, um die Richtung einer Kraft zu verändern.

§. 4.

Bei einer beweglichen Rolle, wenn beide Mächte in parallelen Richtungen wirken, so brauchet die Kraft nur halb so groß zu sein als die Resistenz welche sie in Gleichgewicht hält. Zum Exempel,



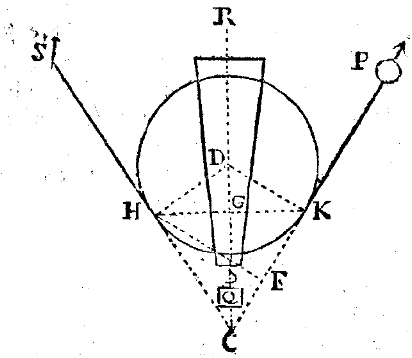
Wenn die Kraft P halb so groß ist als die Resistenz Q, so sind sie beide in Gleichgewicht. Denn die Last Q vertheilet sich so, daß der Nagel S die Hälfte derselben trägt, und folglich die Kraft P die andere Hälfte.

Oder, man betrachte den Durchmesser AB als einen Tragehebel, wo der Ruhepunkt in A, die Last Q in C, und die Kraft P in B angebracht sind. Soll nun das Gleichgewicht statt finden, so muß sich Q zu P verhalten wie AB zu AC. Es ist aber AC halb so groß als AB, folglich muß auch P halb so groß sein als Q.

§. 5

§. 5.

Wenn die Richtungen nicht parallel sind, so verhält sich bei der beweglichen Rolle die Kraft zur Resistenz, welche sie in Gleichgewicht halten kann, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des Bogens, der vom Stricke umfasset wird.



Es ist klar, daß die Kraft P, die Last Q und der Nagel S als drei Kräfte betrachtet werden können, die einander in Gleichgewicht halten. Wenn das Gleichgewicht statt finden soll, so müssen sich beide Kräfte P und Q umgekehrt verhalten wie die senkrechten Linien HF und HG, welche aus einem Punkte H in der Richtung HS der dritten Kraft, welche hier der Nagel ist, auf die Richtungen der beiden übrigen Kräfte gezogen worden (III. H. §. 16). Mit einem Worte, es verhält sich P zu Q wie HG zu HF. Nun sind die rechtwinklichten Dreiecke KDG und HKF einander ähnlich, weil nämlich die Wechselwinkel DKH und KHF gleich sind. Es ist auch HG = KG. Folglich verhält sich KG oder HG zu HF wie KD zu HK. Da sich nun beide Mächte verhalten wie HG zu HF, so

 ver-

verhalten sie sich auch wie KD zu HK, das ist, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des Bogens, welchen das Strick am unteren Theile der Rolle umfasset.

Hierbei wird vorausgesetzet, daß das Strick beiderseits mit der Vertikal-Linie RC gleiche Winkel bildet, nämlich PCR = SCR. Dieses ist auch der gewöhnlichste Fall.

Zusatz. Wenn beide Theile PK und SH des Strickes in einer vertikalen Lage sind, so umfasset das Strick die Hälfte vom Umfange der Rolle, und die Sehne KH verwandelt sich in einen Diameter. Folglich verhält sich in diesem Falle die Kraft P zur Resistenz Q, wie der Halbmesser zum Durchmesser, das heißt, wie 1 zu 2, welches vollkommen mit der obigen Regel übereinstimmet (§ 4).

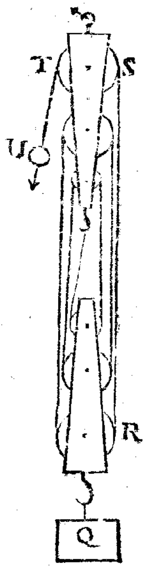
§. 6.

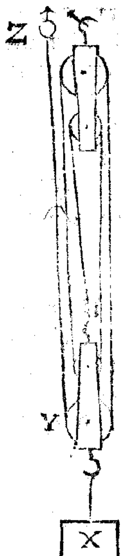
Aus Rollen werden Flaschenzüge zusammengesetzt. Diese bestehen aus verschiedenen Rollen, welche in zwei Flaschen oder Kloben zusammengebracht sind. Jeder Kloben enthält also zwei, drei oder mehrere Rollen, welche entweder neben einander sind, und sich auf derselben Welle herumdrehen, oder unter einander stehen, so daß jede ihre eigene Welle habe. Der eine Kloben wird vermittelst eines Hakens an einem unbeweglichen Punkte befestiget. Der andere aber ist beweglich, und trägt das Gewicht oder die Last. Das Strick wird mit einem Ende entweder an dem oberen Kloben oder an dem unteren befestiget, und gehet dann wechselsweise von einem Kloben zum andern, so daß es alle Rollen umfasset. Am anderen Ende des Strickes wird die Kraft angebracht. Weil bei dieser Maschine die Stricke meistens lang sind, so kann füglich angenommen werden, daß sie alle parallel sind, indem eine kleine Abweichung von der parallelen Lage in der Rechnung keinen merklichen Fehler verursachen kann.

§. 7.

§. 7.

Wenn die Stricke an einem Flaschenzuge parallel sind, oder für parallel gehalten werden können, so erhält man die Kraft, welche nöthig ist, um die Last in Gleichgewicht zu halten, wenn man die Last durch die Anzahl der parallelen Stricke theilet. Das Ende des Strickes, woran die Kraft angebracht ist, wird mitgerechnet, wenn es zuletzt von dem unteren Kloben herkömmt, aber nicht wenn es zuletzt über eine der festen Rollen gehet.





Die erste der beiden beigefügten Figuren stellet einen Flaschenzug vor, wo das eine Ende des Strickes an dem oberen Kloben befestiget ist, und wo das andere Ende zu= lezt durch den nämlichen oberen Kloben gehet. Hier wird die Last von sechs parallelen Stricken getragen, so daß jedes Strick nur den sechsten Theil der Last zu tragen hat. Folg= lich ist der Theil RS des Strickes nur mit dem sechsten Theile der Last Q beschweret, und da die feste Rolle ST an der Wirkung der Kraft nichts verändert, so muß auch die Kraft U den sechsten Theil der Last Q ziehen, und also im Falle des Gleichgewichts diesem sechsten Theile gleich sein.

In der anderen Figur ist das eine Ende des Strickes am unteren Kloben befestiget, und der lezte Theil YZ des Strickes gehet vom unteren Kloben hinauf, und hilft folglich die Last erleichtern. Diese wird demnach von 5 Stricken oder 5 Theilen des Strickes getragen, so daß der Theil YZ nur mit dem 5ten Theile der Schwere X belastet ist. Folglich hat die Kraft Z auch nur den 5ten Theil des Gewichtes X zu tragen, und muß im Falle des Gleichgewichtes diesem 5ten Theile gleich sein.

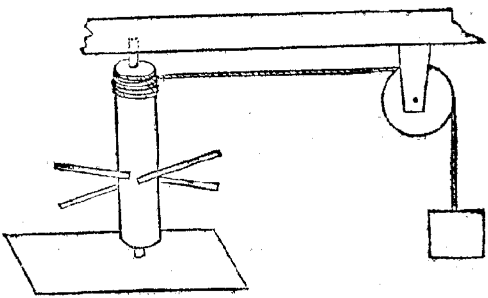
§. 8.

Eine **Winde** ist ein Zylinder, welcher sich um seine Axe herumdrehen kann, aber so, daß die Axe selbst ihren Ort nicht verändert, weswegen an den Enden des Zylin= ders kleine Wellen oder Zapfen befestiget werden, welche sich in Kerben oder Löchern herumdrehen können. An einem solchen Zylinder wird das eine Ende eines Strickes befestiget, das andere Ende des nämlichen Strickes ist an der Last gebunden, welche gehoben werden soll. Wird nun der Zylinder herumgedrehet, so wickelt sich der Strick auf denselben, wodurch dann die Last gezwungen ist, sich dem Zylinder zu nähern. Das Umdrehen des Zylinders geschiehet entweder vermittelst eines Rades, welches am Zylinder befestiget und mit demselben konzentrisch ist, oder vermittelst einer Stange, die durch den Zylinder gehet, oder

oder an demselben befestiget ist. Auch kann man mehrere solche Stangen anbringen, auf daß mehrere Kräfte zugleich zur Umdrehung des Zylinders wirken können.

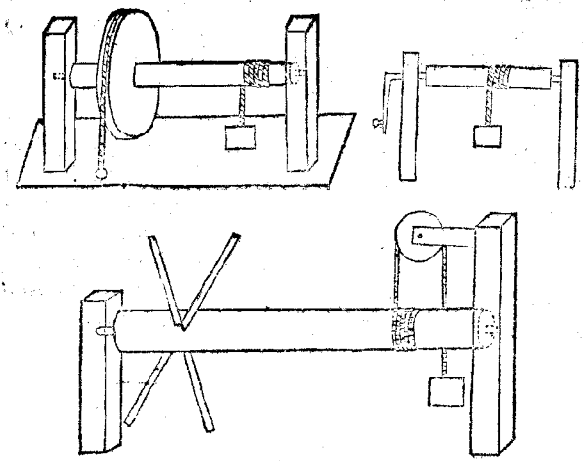
§. 9.

Diese Maschine behält gemeiniglich den Namen einer **Winde**, wenn sie in einer vertikalen Lage ist. Hingegen pfleget man sie einen Haspel zu nennen, wenn die Lage horizontal ist. In der vertikalen Stellung gehöret nothwendig zur Winde noch eine feste Rolle, welche aber das Verhältniß der Kraft zur Resistenz nicht verändern kann. Folgende Figur stellet eine solche vertikale Winde vor.



Wenn die Winde horizontal liegt, so kann das Strick ebenfalls über einer Rolle gehen, oder auch nur bloß am Zylinder herunter hängen. Beides siehet man in folgenden Figuren.

(Siehe die folgenden Figuren.)

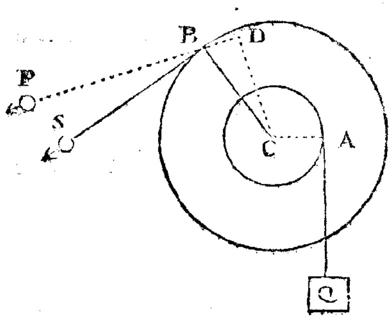


§. 10.

Wie auch die Winde beschaffen sein mag, so erfordert das Gleichgewicht, daß die Kraft und die Resistenz sich umgekehrt verhalten wie die senkrechten Linien, die aus der Axe des Zylinders auf die Richtungen beider Mächte gefället werden. Und wenn die Mächte so wirken, daß ihre Richtungen die Zirkel berühren, welche zu beschreiben sie sich bestreben, so muß sich die Resistenz zur Kraft verhalten wie der Stral oder Halbmesser des Zirkels, den die Kraft beschreibet, zum Halbmesser des Zylinders, worauf das Strick gewikkelt ist.

(Siehe die folgende Figur.)

In



In gegenwärtiger Figur stellet der kleinere Zirkel den Zylinder vor, welcher von einem Ende gesehen wird, und sich folglich nur wie ein Kreis darstellet. Der Mittelpunkt C bedeutet einen der Zapfen, auf welchen der Zylinder sich herumdrehet. Der größere Zirkel ist derjenige, welchen die Kraft beschreibet. Es ist also entweder ein Rad, oder bloß ein Zirkel, welcher in der Luft von der Stange CB beschrieben wird. Die Last Q hänget in der vertikalen Richtung AQ herunter. Das Strick AQ berühret den Zylinder in A, und ist folglich senkrecht auf dessen Halbmesser AC. Die Kraft P ziehet in der Richtung BP entweder am Punkte B des Rades, oder am Ende B der Stange BC. Nun kann man sich ACB als einen gebrochenen Hebel vorstellen, der in C seinen Ruhepunkt hat. Man verlängere PB, und ziehe CD senkrecht auf dieselbe. Wenn nun das Gleichgewicht statt finden soll, so muß sich Q zu P verhalten wie CD zu CA (IV H. §4). Wenn die Richtung BS der Kraft S den Zirkel in B berühret, so fällt CD auf CB; und in diesem Falle muß sich die Resistenz Q zur Kraft S verhalten wie CB sich verhält zum Halbmesser CA des Zylinders. Da sich aber die Halbmesser verhalten wie die von ihnen beschriebenen Kreis-Linien, so kann man auch sagen: es verhalte sich die Resistenz zur Kraft wie die von der Kraft beschriebene Kreislinie zum Umfange des Zylinders.

Wäre also zum Exempel Q = 300 Pfund, AC = $\frac{1}{2}$ Fuß, CB = 5 Fuß, und es sollte die Kraft S gefunden werden, welche die 300 Pfund in Gleichgewicht halten kann, so müßte man sagen:

$$CB, CA :: Q, S$$

oder $$5, \tfrac{1}{2} :: 300, S$$

folglich $$S = \frac{\frac{1}{2} \cdot 300}{5} = 30$$

Man könnte auch das Strick BS bei S über eine Rolle gehen lassen, und ein Gewicht von 30 Pfund daran hängen, welches dann mit den 300 Pfunden in Gleichgewicht sein würde.

Anstatt einer einzelnen Kraft, welche die Winde herumdrehet, kann man auch mehrere anbringen. Zum Exempel, wenn anstatt der Stange CB vier Stangen aus dem Mittelpunkte gingen, so könnte man die 30 Pfund vertheilen, so daß auf jede Kraft nur $7\frac{1}{2}$ Pfund kämen.

Anmerkung. Der vorhergehende Beweis ist so eingerichtet, als wenn die beiden Arme CB und CA des Hebels ACB wirklich in einem Punkte C zusammenträfen. Dieses ist nun in der That nicht der Fall, indem das Strick AQ meistens an einem Orte des Zylinders hänget, der von der Stange CB etwas entfernet ist. Der Arm CB des Hebels, wenn er durch eine Kraft S herunter gezogen wird, hat eigentlich in diesen Umständen eine doppelte Wirkung. Denn erstlich bestrebet er sich, den Zylinder selbst oder dessen Axe niederwärts zu drücken, und zweitens bestrebet er sich, auch gedachte Axe samt dem

dem Arme CA herumzudrehen. Die erste Wirkung wird aber durch die Stützen, worauf die Zapfen des Zylinders ruhen, gänzlich vernichtet; und also bleibet nur die zweite. Folglich wirket der Arm CB nicht anders als der Arm eines gemeinen Hebels auf den andern Arm CA. Wenn man sich nun auch das Gewicht Q an den Arm AC angehänget vorstellet, so lässet sich wiederum das nämliche davon sagen. Woraus dann erhellet, daß beide Arme CB und CA, ob sie gleich nicht in eine Ebne liegen, dennoch eben solche Wirkung äußern, als wenn sie in derselben Ebne lägen und im Punkte C zusammenträfen.

§. 11.

Die Winden, wovon wir jetzt geredet haben, werden in verschiedenen Fällen des gemeinen Lebens gebraucht. Zu diesen Maschinen muß man noch alle diejenigen Wellen oder runden Bäume rechnen, die, durch welche Kraft es auch sein mag, um ihrer Axe herumgedrehet werden. Zum Exempel, das vornehmste Stück an einer Windmühle ist nichts anders als eine Welle, die, vermittelst der Flügel und des auf dieselben wirkenden Windes, herumgedrehet wird. Denn da die Flügel in schiefer Lage gegen den Wind gerichtet sind, so zertheilet sich die Kraft des Windes in zwei andere Kräfte, wovon die eine mit der Fläche jedes Flügels parallel ist, die andere aber auf dieselbe Fläche senkrecht ist. Der parallele Theil der Kraft gehet verloren. Hingegen der senkrechte Theil dienet zur Umdrehung der Flügel sammt der Welle.

Ebenfalls an einer Wassermühle ist der Haupttheil eine Welle, welche von einem großen Rade, vermittelst des auf das Rad wirkenden Stromes, herumgedrehet wird. Der Strom wirket aber auf das Rad vermittelst der Staffeln oder Querbrettchen, welche am ganzen Umfange desselben angebracht sind.

Der

Der Kranich, oder die Maschine, welche man an den Ufern zu gebrauchen pfleget, um die Schiffe abzuladen, bestehet ebenfalls hauptsächlich aus einer Welle, welche durch ein großes Rad herumgedrehet wird. Das Rad selbst ist nicht massiv, sondern hat nur einen Umfang von Brettern, und dieser Umfang wird vermittelst einiger Stralen mit der Welle verbunden. Inwendig sind Stufen am Umfange, und, indem ein Mensch diese Stufen steiget, so drehet er das Rad sammt der Welle herum. Um diese Welle wickelt sich ein Strick, welches über eine hoch angebrachte Rolle gehet, und an dessen Ende die Last angehänget wird, welche man in die Höhe ziehen will. Bei dieser Maschine wirket der Mensch vermittelst seines Gewichtes. Das Moment dieses Gewichtes wird bestimmet, wenn man sich eine Vertikal-Linie als Richtungs-Linie durch dasselbe gedenket. Das Gewicht nun, mit der Entfernung dieser Vertikal-Linie vom Mittelpunkte des Rades multipliziret, giebt das Moment der Kraft. Und soll das Gleichgewicht statt finden, so muß ein gleiches Produkt heraus kommen, wenn die Last mit dem Halbmesser der Welle multipliziret wird.

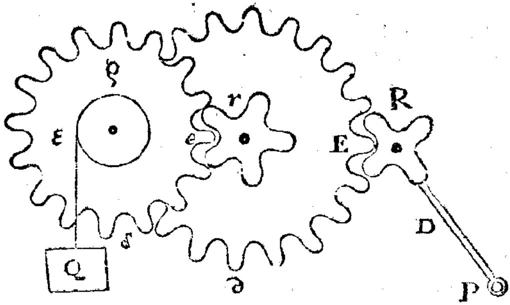
§. 12.

Aus den Eigenschaften der Winden lassen sich auch die Eigenschaften und Wirkungen der Räderwerke erklären. Ein Räderwerk ist eine Maschine, oder ein Theil einer Maschine, wo verschiedene Räder auf einander wirken, deren jedes an seinem Umfange mit Zähnen versehen ist, welche gleich weit von einander abstehen. Wenn diese Zähne in der Ebne des Rades liegen, so ist es ein **Sternrad**. Wenn sie aber seitwärts und auf dem Rade senkrecht stehen, so ist es ein **Kammrad**. Jedes Rad ist an einer Welle befestiget, und muß sich mit derselben herumdrehen. An der Welle ist wiederum ein **Getrieb** angebracht. Dieses ist ein kleiner Zylinder, welcher die Welle umgie-

umgiebet, mit derselben konzentrisch ist, und ebenfalls in Zähne eingetheilet ist, die mit der Welle parallel laufen. Anstatt dieses kleinen Zylinders kann man auch bloß zwei parallele Zirkel an der Welle befestigen, und anstatt der Zähne des Getriebes lauter parallele Stöckchen anbringen, welche alsdann Trieb-Stöckchen genannt werden. Oder, es werden in der Welle selbst rund herum Vertiefungen eingegraben, da dann zwischen denselben die Zähne des Getriebes stehen bleiben.

Das erste Stück eines Räderwerkes pfleget nicht ein Rad mit Zähnen zu sein, sondern bloß eine Welle mit einem Getriebe, welche vermittelst eines Handgriffes oder auch eines Rades ohne Zähne herumgedrehet werden kann. Die Zähne dieses ersten Getriebes greifen in die Zähne eines großen Rades, dessen Welle mit einem zweiten Getriebe versehen ist. Dieses zweite Getrieb greifet wiederum in die Zähne eines anderen Rades, welches ebenfalls mit einem Getriebe versehen ist. Und so wird allemal ein Rad durch das Getrieb des vorhergehenden beweget, oder wenigstens zur Bewegung gereizet. Das lezte Rad hat kein Getrieb nöthig, weil kein folgendes Rad mehr vorhanden ist, sondern es hat bloß eine Welle oder eine Trommel, worauf sich ein Strick wickelt, an welchem die Last oder Resistenz angehänget ist. Folgende Figur kann einen Begriff geben, wie jedes Getrieb in das folgende Rad eingreifet.

(Siehe die folgende Figur.)



Anmerkung. Die Zähne eines Getriebes müssen im selbigen Abstande von einander sein, wie die Zähne des Rades, worin das Getrieb eingreifet, weil sonst die beiderseitigen Zähne sich nicht genau in einander fügen könnten. So vielmal also der Umfang des Rades größer ist als der Umfang des eingreifenden Getriebes, so vielmal mehr Zähne muß auch das Rad haben. Ueberhaupt verhalten sich also die Zähne der in einander eingreifenden Theile des Räderwerks, wie die Umfänge dieser Theile, folglich auch wie ihre Durchmesser oder Halbmesser.

Woraus dann erhellet, daß das Verhältniß der Anzahl der Zähne allemal anstatt des Verhältnisses der Umkreise, oder der Halbmesser, oder der Durchmesser gesezt werden kann, und auch umgekehrt.

§. 13.

In einem Räderwerke verhält sich die Kraft P zur Resistenz Q, welche sie in Gleichgewicht halten kann, wie das Produkt der Halbmesser aller Getriebe, (die lezte Welle mitgerechnet) zum Produkte der

der Halbmesser aller Räder, (die Länge der Stange mitgerechnet, woran die Kraft angebracht ist).

Um dieses zu beweisen, muß man bedenken, daß jedes Stück, woraus das Räderwerk bestehet, nichts anders ist als eine Art von Winde; denn die Zähne dienen zu weiter nichts, als daß sie die Wirkung der einen Winde auf die folgende fortpflanzen. Lasset uns also annehmen, ein Räderwerk bestehe, wie in voriger Figur, aus drei Stücken, nämlich aus einer Stange, die ein Getrieb herumdrehet, einem Rade mit seinem Getriebe, und noch einem Rade mit einer Trommel. Es sei D die Länge der Stange, bis zur Axe des Getriebes oder der Welle gerechnet, d der Halbmesser des ersten Rades und δ der Halbmesser des zweiten Rades. Es sei R der Halbmesser des ersten Getriebes, r der Halbmesser des zweiten, und ϱ der Halbmesser der Trommel. Betrachtet man nun das erste Stück als eine Winde, so übet sie in E eine Kraft aus, welche so beschaffen ist, daß

$$R, D :: P, E$$

$$\text{daher} \quad E = \frac{D.\,P}{R}$$

Diese Kraft E wirket nun auf das zweite Stück, und bringet in e wiederum eine Kraft hervor, so daß

$$r, d :: E, e$$

$$\text{oder} \quad r, d :: \frac{D.\,P}{R}, e$$

$$\text{daher} \quad e = \frac{D.\,d.\,P}{R.\,r.}$$

Diese

Diese Kraft e wirket nun auf das dritte Stück des Räderwerkes, und verursachet bei ε eine neue Kraft, so daß

$$\varrho,\ \delta :: e,\ \varepsilon$$

$$\text{oder}\quad \varrho,\ \delta :: \frac{D,\ d.\ P}{R.\ r},\ \varepsilon$$

$$\text{daher}\quad \varepsilon = \frac{D.\ d.\ \delta.\ P}{R.\ r.\ \varrho.}$$

Da nun diese Kraft ε am Umfange der Trommel wirket, um das Strick aufwärts zu ziehen, so kann sie eine gleiche Kraft Q in Gleichgewicht halten, welche niederwärts ziehet. Folglich ist auch

$$Q = \frac{D.\ d.\ \delta.\ P}{R.\ r.\ \varrho}$$

$$\text{oder}\quad Q = \frac{D.\ d.\ \delta}{R.\ r.\ \varrho}\ P$$

$$\text{oder}\quad \frac{Q}{P} = \frac{D.\ d.\ \delta}{R.\ r.\ \varrho}$$

$$\text{oder}\quad P,\ Q :: R.\ r.\ \varrho,\quad D.\ d.\ \delta$$

Zusatz I. Da $Q = \frac{D.\ d.\ \delta}{R.\ r.\ \varrho.}.\ P$ oder $Q = \frac{D}{R}.\ \frac{d}{r}.\ \frac{\delta}{\varrho}.\ P$, so siehet man, daß man die Kraft P mit dem Verhältnisse des kleineren Halbmessers zum größeren in jedem Stücke des Räderwerkes multipliziren muß, um die Resistenz Q zu bekommen, welche von derselben in Gleichgewicht gehalten werden kann. Folglich, je mehr Stücke im Räderwerke vorhanden sind, desto öfterer muß P multipliziret werden, und desto größer wird folglich die Wirkung der ganzen Maschine, wenn sonst alles unverändert bleibet.

Ferner

Ferner werden die Faktoren $\frac{D}{R}$, $\frac{d}{r}$, $\frac{\delta}{\varrho}$ desto größer, je kleiner die Getriebe, in Betrachtung der mit ihnen verbundenen Räder, sind. Folglich wird auch die Wirkung der Maschine desto größer, je kleiner die Getriebe in Betrachtung der Räder sind. Hier rechnen wir die Trommel oder Walze, worauf sich das Strick windet, anstatt eines Getriebes, und den Zirkel, den der Handgriff beschreibet, anstatt eines Rades.

Zusatz II. Vermittelst der gefundenen Formel läßt sich nun das Verhältniß der Kraft zur Resistenz bei jedem Räderwerke sehr leicht bestimmen. Man darf nur die Durchmesser oder Halbmesser aller Theile der Maschine ausmessen, und dann die gefundenen Zahlen in die Formel setzen. Es sei zum Exempel in der letzten Figur der Handgriff $D = 10$ Zoll, der Halbmesser d des ersten Rades $= 12$ Zoll, der Halbmesser δ des zweiten Rades $= 15$ Zoll. Es seien ferner die kleineren Halbmesser $R = 2$, $r = 3$, $\varrho = 2\frac{1}{2}$. Es sei die Kraft $P = 50$ Pfund, so ist

$$Q = \frac{10 . 12 . 15}{2 . 3 . 2\frac{1}{2}} . 50 \text{ Pfund} = 6000 \text{ Pfund}.$$

Man siehet also, daß vermittelst des angeführten Räderwerkes eine Kraft, die ohne Werkzeug nur 50 Pfund in Gleichgewicht halten könnte, im Stande ist, 6000 Pfund in Gleichgewicht zu halten. Es sei ferner $D = 15$, $d = 18$, $\delta = 20$, $R = 1$, $r = 1\frac{1}{2}$, $\varrho = 2$, und die Kraft P sei wiederum $= 50$ Pfund, so ist

$$Q = \frac{15 . 18 . 20}{1 . 1\frac{1}{2} . 2} . 50 \text{ Pfund} = 90000 \text{ Pfund}.$$

Hier ist die Wirkung der Kraft schon sehr vergrößert, weil die kleineren Halbmesser von den größeren mehrmal übertroffen werden.

Wenn anstatt der Kraft P die Resistenz Q gegeben wäre, so könnte die erforderliche Kraft ebenfalls leicht berechnet werden. Denn da

$$Q = \frac{D.\,d.\,\delta}{R.\,r.\,\varrho}.\,P$$

so ist $$Q.\,R.\,r.\,\varrho = D.\,d.\,\delta.\,P$$

folglich $$\frac{R.\,r.\,\varrho}{D.d.\delta.}.\,Q = P$$

§. 14.

Wenn ein Räderwerk in Bewegung ist, so verhält sich die Anzahl der Umdrehungen eines Rades zur Anzahl der Umdrehungen des folgenden Rades, welches von dem ersteren die Bewegung erhält, wie die Anzahl der Zähne dieses zweiten Rades zur Anzahl der Zähne des Getriebes am ersteren Rade; und was hier von zwei auf einander folgenden Rädern gesaget wird, kann ebenfalls vom Handgriff und dem allerersten Rade verstanden werden.

Um den Beweis deutlicher zu machen, wollen wir das eine Rad A, und das darauf folgende B nennen. Während daß das Rad A sich einmal herumdrehet, drehet sich dessen Getrieb auch nur einmal herum. Gesezt nun dieses Getrieb habe n mal weniger Zähne als das Rad B, worin es eingreifet, so muß gedachtes Getrieb, und folglich auch das Rad A, n mal herum, bis alle Zähne des Rades B vom Getriebe gegriffen worden, und also dieses Rad B ein einziges mal herum ist. Ueberhaupt also, wenn das

das Rad B $n$mal mehr Zähne hat als das Getrieb des Rades A, so gehet dieses Getrieb $n$mal öfterer herum als das Rad B, oder, wie gesaget worden, es verhält sich die Anzahl der Umdrehungen des Rades A zur Anzahl der Umdrehungen des Rades B, wie sich die Anzahl der Zähne des Rades B verhält zur Anzahl der Zähne des Getriebes am Rade A. Gesezt also, das Getrieb am Rade A habe 6 Zähne, das Rad B aber habe 72 Zähne, so sind die Umwendungen des Rades A zu den Umwendungen des Rades B, wie 72 zu 6, oder wie 12 zu 1, das heißt: das Rad A drehet sich 6mal herum, indem sich das Rad B nur einmal herum drehet.

Um diese kleine Berechnung noch einfacher zu machen, darf man nur die Anzahl der Zähne des Rades B durch die Anzahl der Zähne des Getriebes am Rade A dividiren, um eine Zahl zu bekommen, welche ausdrücket, wie vielmal das Rad A sich herumdrehet, unterdessen daß das Rad B sich nur einmal herum drehet.

Zusaz I. Anstatt des Verhältnisses der Anzahl der Zähne kann man auch das Verhältniß der Umkreise des Getriebes und des Rades, oder der Halbmesser, gebrauchen, weil diese Verhältnisse jenem gleich sind.

Zusaz II. In einem bewegten Räderwerke verhält sich die Anzahl der Umdrehungen des Handgriffes zur Anzahl der Umdrehungen der Welle, worauf das Strick gewickelt ist, wie das Produkt aus den Anzahlen der Zähne, oder den Halbmessern, oder den Umkreisen aller Räder, zum Produkte aus den Anzahlen der Zähne, oder den Umkreisen, oder den Halbmessern aller Getriebe.

Es sei C der Umkreis, welchen der Handgriff beschreibet, c der Umkreis des ersten Rades, und $\varkappa$ der Umkreis des zweiten Rades. L sei der Umkreis des Getriebes am Handgriff, l der Umkreis des Getriebes am ersten Rade, und λ der Umfang der Welle, worauf das Strick gewickelt ist. Es sei ferner N die Anzahl der Umdrehungen des Handgriffs, n des ersten Rades, und ν des zweiten Rades. Nun verhält sich

$$c, L :: N, n$$

daher $$n = \frac{N. L}{c}$$

Dieser Ausdruck giebt also die Umdrehungen des ersten Rades, während daß der Handgriff sich Nmal herumdrehet. Ferner ist

$$k, l :: n, \nu$$

oder $$k, l :: \frac{N. L}{c}, \nu$$

daher $$\nu = \frac{N. L. l}{c. k} = N. \frac{L. l}{c. k}$$

folglich $$N, \nu :: c. k, L. l$$

Hieraus siehet man, daß bei den Berechnungen der Umwendungen, der Umkreis C, welchen der Handgriff beschreibet, wie auch der Umfang λ der Welle, worauf das Strick gehet, gar nicht in Anschlag genommen werden.

§. 15.

Was wir vom bewegten Räderwerke gesaget haben, findet eine vorzügliche Anwendung in der Uhrmacherkunst. Denn eine Uhr ist nichts anders als ein Räderwerk. Die bewegende Kraft ist entweder ein Gewicht, oder eine Stahlfeder, welche das erste Rad herumdrehet. Die Resistenz, welche zu überwinden ist, bestehet in einem

Per=

Perpendikel, welcher von dem lezten Rade hin und her getrieben und in seinen Schwingungen erhalten wird. Da nun so wohl die Kraft als auch die Resistenz beständig einerlei bleiben, und da die Resistenz von der Kraft überwogen wird, so entstehet eine einförmige drehende Bewegung der Räder. Diese drehen wiederum die Zeiger herum, so daß eine solche Maschine eine genaue und einförmige Eintheilung der Zeit bestimmen kann. Da nun hier alles hauptsächlich auf die Anzahl der Umwendungen der Räder ankömmt, so kann man dabei folgende Regeln bemerken.

I) In einem bewegten Räderwerke führet entweder das Getrieb das Rad, oder das Rad führet das Getrieb, je nachdem die bewegende Kraft dem Rade vermittelst des Getriebes, oder dem Getreibe vermittelst des Rades mitgetheilet wird. In beiden Fällen wird die Anzahl der Umdrehungen des geführten Stückes durch einen Bruch ausgedrücket. Der Zähler ist ein Produkt aus der Anzahl der Zähne des führenden Stückes und der Anzahl seiner Umdrehungen. Die Nenner ist die Anzahl der Zähne des geführten Stückes. Zum Exempel, wenn ein Getriebe von sechs Zähnen ein Rad von 52 Zähnen führet, und es wird gefraget, wie oft das Rad herum gehen wird, unterdessen daß das Getrieb 26mal herum gehet, so ist die Antwort

$$\frac{6 \times 26}{52} = 3 \text{ mal}$$

II) Wenn man also ein Räderwerk hat, was aus verschiedenen Rädern und Getrieben bestehet, so läßt sich leicht bestimmen, wie sich die Umwendungen des ersten und lezten Stückes verhalten. Das erste Stück sei ein Rad von 48 Zähnen, welches ein Getrieb von 8 Zähnen führet; an der Axe dieses Getriebes sei ein Rad von

40 Zähnen befestiget, welches wiederum ein Getrieb von 6 Zähnen führet. Die Axe dieses zweiten Getriebes mag ein Rad von 36 Zähnen tragen, welches wiederum in ein Getrieb von 6 Zähnen eingreift, so wird die Anzahl der Umdrehungen des lezten Getriebes, während daß das erste Rad einmal herum gehet, durch folgendes Produkt ausgedrücket

$$\frac{48}{8} \times \frac{40}{6} \times \frac{36}{6} = 240$$

III) Hieraus folget, daß in dem lezten Stücke die nämliche Anzahl der Umwendungen mit sehr verschiedenen Abtheilungen der Zähne hervorgebracht werden kann, wenn nur die Brüche, welche in einander multipliziret werden müssen, allemal ein gleiches Produkt hervorbringen. Zum Exempel, das Produkt 240 kann auch also entstehen

$$\frac{64}{10} \times \frac{50}{8} \times \frac{36}{6} = 240$$

Folglich, anstatt des vorigen Räderwerkes könnte man auch eines gebrauchen, wo die Räder 64, 50 und 36, die Getriebe aber 10, 8 und 6 Zähne haben.

IV) Es ist

$$\frac{48}{8} \times \frac{40}{6} \times \frac{36}{6} = \frac{48 \times 40 \times 36}{8 \times 6 \times 6}$$

und der Werth dieses letzten Bruches bleibet unverändert, in welcher Ordnung man auch die Faktoren des Zählers und des Nenners setzen mag. Hieraus folget, daß man willkürlich jedem Rade im Zähler ein beliebiges Getrieb im Nenner geben kann, und daß dennoch im letzten Stücke die nämliche Anzahl der Umwendungen entstehen wird. Obgleich aber die Einrichtung in der Theorie willkürlich ist,

ist, so ist sie es nicht ganz in der Ausübung; denn der Künstler muß den verschiedenen Stücken ein Verhältniß geben, welches zum Theil von der gebrauchten Materie abhängt, zum Theil auch von der Größe, die er der ganzen Maschine geben will.

V) Wenn die Anzahl der Umdrehungen gegeben ist, welche die letzte Welle machen soll, während daß das erste Rad, woran die bewegende Kraft angebracht ist, einmal herum gehet, und wenn zugleich die Anzahl der anzubringenden Räder und Getriebe bestimmet ist, so läßt sich auf eine leichte Art die Abtheilung der Zähne finden. Zum Exempel, es sollen 4 Räder und eben so viel Getriebe gebrauchet werden, so daß jedes Rad ein Getrieb führet, und während das eine Rad einmal herumgehet, soll das letzte Getrieb sammt seiner Welle 3600mal herumgehen. Man nehme alle Primzahlen, woraus die gegebene Zahl der Umwendungen, als aus ihren Faktoren bestehet. Diese Primzahlen wird man finden, wenn man die gegebene Zahl nach und nach durch die möglichst kleinsten Divisoren theilet. Also wird man finden, daß 2,2,2,2,3,3,5,5 die Primzahlen oder Divisoren der Zahl 3600 sind. Man vertheile diese Divisoren in welcher Ordnung man will, und mache so viel Abtheilungen davon als Räder gebrauchet werden sollen. Zum Exempel im gegenwärtigen Falle kann man die Faktoren zwei und zwei zusammennehmen,

$$\text{also} \quad (2.2), (2.3), (2.5), (3.5)$$

Man multiplizire die Faktoren jeder Abtheilung, und schreibe 1 als Nenner darunter, so bekömmt man im gegenwärtigen Falle

$$\frac{4}{1}, \frac{6}{1}, \frac{10}{1}, \frac{15}{1}.$$

 Bei

Bei jedem dieser Brüche multiplizire man sowohl den Zähler als den Nenner mit einer ganzen Zahl, welche die Zähne ausdrücket, die jedes Getrieb haben soll. Zum Exempel, wenn man in vorigen Brüchen Zähler und Nenner, bei dem ersten mit 7, bei dem zweiten mit 8, bei dem dritten mit 6, und bei dem vierten mit 5 multipliziret, so bekömmt man

$$\frac{28}{7}, \frac{48}{8}, \frac{60}{6}, \frac{75}{5}$$

Aus diesen einzelnen Brüchen, wenn sie in einander multipliziret werden, entstehet nun ein einziger Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich viel Faktoren haben, und man kann im Zähler jedes beliebige Rad wählen, um es mit einem Getriebe aus dem Nenner zu verbinden. In unserem Exempel bekömmt man das Produkt

$$\frac{28 \times 48 \times 60 \times 75}{7 \times 8 \times 6 \times 5} = 3600$$

welches man folgendermaßen vertheilen kann

$$\frac{75}{8} \cdot \frac{60}{7} \cdot \frac{48}{6} \cdot \frac{28}{5} = 3600$$

Also werden die Räder 75, 60, 48 und 28 Zähne bekommen, die Getriebe aber 8, 7, 6 und 5. Man hätte auch gleich anfänglich die vier Abtheilungen der Primzahlen anders einrichten können, zum Exempel

$$(2.2.5), (2.3), (2.3), 5$$

welches folgende Brüche gegeben hätte

$$\frac{20}{1}, \frac{6}{1}, \frac{6}{1}, \frac{5}{1}$$

woraus ein anderes Räderwerk von gleicher Wirkung entstanden wäre.

VI)

VI) Aus dem vorhergehenden läßt sich leicht schließen, wie viel Zähne ein verlornes Rad oder Getrieb gehabt hat, wenn man nur die Wirkung des Ganzen kennet. Zum Exempel, es fehle das Getrieb y in einem Räderwerke, dessen Wirkung durch folgende Gleichung ausgedrücket wird

$$\frac{48}{8} \cdot \frac{40}{y} \cdot \frac{36}{6} = 240$$

so ist $48 \cdot 40 \cdot 36 = 240 \cdot 8 \cdot 6 \cdot y$

folglich $$y = \frac{48 \cdot 40 \cdot 36 \cdot}{240 \cdot 8 \cdot 6} = 6$$

woraus man siehet, daß das fehlende Getrieb 6 Zähne gehabt hat.

VII) Auf eine ähnliche Art kann man die Veränderung finden, welche entweder an einem einzelnen Rade, oder an dessen Getriebe, oder an beiden zugleich gemachet werden muß, wenn für das letzte Stück eine andere Anzahl der Umwendungen herauskommen soll. Z. Ex. das oben berechnete Räderwerk

$$\frac{28}{5} \times \frac{48}{6} \times \frac{60}{7} \times \frac{75}{8} = 3600$$

soll in ein anderes verwandelt werden, welches 4000 Umwendungen giebt, indem man alle Stücke behält, ausgenommen das zweite; so bekömmt man folgende Gleichung

$$\frac{28}{5} \times \frac{x}{y} \times \frac{60}{7} \times \frac{75}{8} = 4000$$

folglich $$\frac{x}{y} = 4000 : \left(\frac{28}{5} \times \frac{60}{7} \times \frac{75}{8}\right)$$

oder $$\frac{x}{y} = 4000 \times \frac{5}{28} \times \frac{7}{60} \times \frac{8}{75}$$

 oder

$$\text{oder} \quad \frac{x}{y} = \frac{4000 \times 5 \times 7 \times 8}{28 \times 60 \times 75} = \frac{80}{9}$$

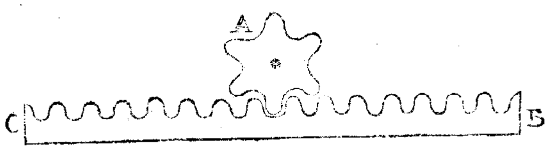
woraus man siehet, daß anstatt des herausgenommenen Stückes ein anderes angebracht werden muß, wo das Rad 80 und das Getrieb 9 Zähne bekömmt.

§. 16.

Es möchte jemand fragen, ob man nicht aus bloßen in einander greifenden Rädern, ohne Getrieben, eine brauchbare Maschine verfertigen könnte. Es dienet zur Antwort, daß solche Maschine zu weiter nichts dienen könnte, als allenfalls die Wirkung der Kraft zu lenken, und in eine gewisse Entfernung fortzusetzen. Denn, jedes einzelne Rad ist als eine befestigte Rolle anzusehen, welche wegen der gleichen Entfernung beider Mächte vom Mittelpunkte, der Kraft keinen Vortheil verschaffet. Also können auch mehrere Räder, die einander treiben, die Wirkung der Kraft nicht vermehren.

§. 17.

Anstatt daß gewöhnlich ein Getrieb in ein Rad eingreifet, giebt es auch Maschinen, wo das Getrieb in eine Stange eingreifet, welche, wie eine Säge, mit Zähnen versehen ist, und dieselbe der Länge nach beweget. Z. Ex.

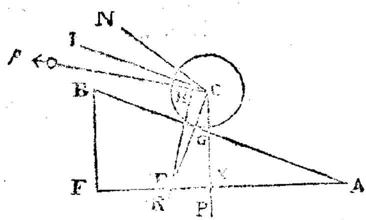


wenn das Getrieb A und die zackigte Stange BC so angebracht sind, daß sich das Getrieb nur um seine Welle, und

und die Stange sich nur der Länge nach bewegen kann, so muß nothwendig die Stange fortrücken, wenn das Getrieb herumgedrehet wird. Auf diese Art sind die Wagenwinden eingerichtet, vermöge welcher die vertikal stehende Stange BC die Axen der Wagenräder hebet. So sind auch die Stangen an den Stempeln der Luftpumpen beschaffen. Uebrigens verhält sich hier die Kraft zur Resistenz, wie der Halbmesser des Getriebes zur Länge des Hebels, wodurch es gedrehet wird. Denn die Stange dienet nur, um die Wirkung der Kraft bis auf die Resistenz fortzupflanzen.

§. 18.

Wir schreiten nun zur schiefen Ebne, welche in manchen Fällen als Maschine gebrauchet wird.



Wenn man einen Körper C auf einer schiefen Ebene AB zurückhält, so daß er nicht herunter rollen oder gleiten könne, so sind drei Kräfte vorhanden, welche einander das Gleichgewicht halten, nämlich 1) die Schwere des Körpers C, welche man als eine Kraft betrachten kann, die sich bestrebet, den Körper in der vertikalen Richtung CP herunter zu stoßen, 2) eine Kraft p, welche den Körper in einer beliebigen Richtung Cp zurückziehet oder zurückhält; 3) der Widerstand der schiefen Ebene AB; dieser kann als eine dritte Kraft betrachtet werden, welche gegen den Körper C in der Richtung RC wirket, so daß RC auf AB senkrecht

recht sei; denn in dieser senkrechten Richtung stützet die Ebene AB den Körper C.

§. 19.

Die Kraft, welche eine Last auf einer schiefen Ebene in Gleichgewicht hält, verhält sich zu dieser Last, wie der Sinus des Neigungs-Winkels der schiefen Ebenen sich verhält zum Kosinus des Winkels, welchen die Richtung der Kraft mit der schiefen Ebene machet.

Man ziehe CI mit der schiefen Ebene AB parallel, so ist der Winkel DCI ein rechter, und der Winkel ICp bestimmet die Neigung der Richtung Cp gegen CI oder gegen die Ebene AB. Ferner ist der Winkel DCH oder DCp das Komplement des Winkels ICp, weil beide zusammen einen Rechten ausmachen.

Die Dreiecke DCK und AKG sind ähnlich, weil ihre homologen Seiten gegen einander senkrecht stehen. Folglich ist der Winkel KAG, welcher die Neigung der Ebene bestimmet, dem Winkel DCK gleich, indem beide Winkel den auf einander senkrecht stehenden Seiten KG und KD entgegengesetzt sind.

Nimmt man nun DC zum Halbmesser oder Sinus-totus, so wird DK der Sinus des Winkels DCK, und DH (auf Cp senkrecht) wird der Sinus des Winkels DCH.

Da nun der Widerstand der Ebne, welcher in der Richtung DC oder RC wirket, mit die Kraft p und der Schwere des Körpers C das Gleichgewicht halten soll, so müssen sich die Kraft p und das Gewicht des Körpers C gegen einander verhalten, umgekehrt wie die senkrechten Linien, welche aus irgend einem Punkte D in der Richtung RC

RC auf die beiden übrigen Richtungen gefället werden (III H. § 16). Drücken wir demnach durch P das Gewicht des Körpers C aus, so muß sich p zu P verhalten wie DK zu DH, das heißt, wie der Sinus des Winkels DCK zum Sinus des Winkels DCH, oder wie der Sinus des Winkels KAG zum Kosinus des Winkels ICp, nämlich wie der Sinus des Winkels, welchen die schiefe Ebne mit der horizontalen Ebne machet, zum Kosinus des Winkels, welchen die Richtung der Kraft p mit der schiefen Ebene selbst machet

Zusatz I. Wenn die Richtung Cp mit der schiefen Fläche parallel ist, nämlich wenn die Kraft in der Richtung CI wirket, so fällt DH auf DC, das heißt, der Sinus des Winkels DCH wird dem Halbmesser gleich, und folglich auch der Kosinus des Winkels ICp, welcher in diesem Falle null ist. Alsdann verhält sich die Kraft p zum Gewichte P, wie der Sinus des Neigungswinkels der Ebne, zum Halbmesser. Wird nun AB zum Halbmesser angenommen, so ist BF der Sinus des Neigungswinkels BAF. Folglich verhält sich dann p zu P wie BF zu AB, das heißt, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Zusatz II. Wenn die Richtung Cp horizontal ist, so ist der Winkel pCD das Komplement des Winkels DCK, weil beide zusammen alsdann den rechten Winkel pCK bilden. In diesem Falle verhält sich p zu P wie der Sinus des Neigungswinkels der Ebene zum Kosinus desselbigen Winkels. Nimmt man AB zum Halbmesser, so ist BF der Sinus, und AF der Kosinus des Neigungswinkels. Folglich verhält sich im gegenwärtigen Falle die Kraft zur Resistenz, wie BF zu AF, das heißt, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge der Grundlinie AF.

DCK
pCK

Zusatz III. Man stelle über IC einen Winkel NCI, welcher dem Winkel ICp gleich sei, so wird der Erfolg der

der nämliche sein, es mag die Kraft in N oder in p wirken. Denn der Beweis wird der nämliche sein, wenn man NC verlängert, und DH auf die Verlängerung senkrecht fället. Woraus man siehet, daß die Größe der Kraft p bloß von der Neigung ihrer Richtung gegen CI oder gegen die schiefe Fläche abhänget, es mag übrigens der Winkel oberhalb oder unterhalb der Linie liegen, welche durch den Schwerpunkt des Körpers mit der schiefen Ebene parallel läuft.

Zusatz IV. In der Proporzion

$$p, P :: DK, DH$$

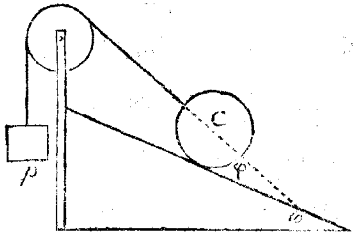
stellet DK die Kraft vor und DH die Resistenz. Nun wird DH desto größer, je größer der Winkel DCp oder je kleiner der Winkel pCI wird. Hieraus folget, daß die Resistenz desto größer genommen werden kann, je weniger die Richtung der Kraft gegen die schiefe Fläche geneiget ist, oder daß die Kraft desto mehr Wirkuug thut, je mehr sich ihre Richtung der parallelen Lage mit der schiefen Ebene nähert. Folglich ist bei dieser parallelen Richtung die Wirkung am größesten. Hierbei setzen wir voraus, daß die Neigung der Ebene unverändert bleibet.

Zusatz V. Da DK die Kraft vorstellet, und diese Linie desto kleiner wird, je kleiner der Winkel DCK oder BAF ist, so folget, daß, wenn alles übrige unverändert bleibet, eine desto kleinere Kraft nöthig ist, um eine Last auf der schiefen Ebne in Gleichgewicht zu halten, je kleiner der Neigungswinkel der Ebene ist, oder daß die Kraft desto mehr Wirkung thuet, je kleiner dieser Winkel ist.

§. 20.

Anstatt der Kraft p läßt sich vermittelst einer Rolle ein Gewicht anbringen, welches das andere Gewicht auf der schie-

schiefen Ebene in Gleichgewicht halten kann. Zum Exempel in folgender Figur sind p und C zwei Gewichte, ω ist der Winkel, welchen die schiefe Ebne mit dem Horizont machet, φ ist der Winkel, welchen die Richtung der Kraft mit der schiefen Fläche machet.



Soll nun das Gleichgewicht statt finden, so muß sich p zu C verhalten wie der Sinus des Winkels ω zum Kosinus des Winkels φ, oder es muß sein

$$p. \mathfrak{S}'\varphi = C. \mathfrak{S}\,\omega$$

Aus dieser Gleichung läßt sich jede der darin enthaltenen Größen bestimmen, wenn die drei übrigen gegeben sind. Es sei zum Exempel $C = 100$ Pfund, $\omega = 35$ Grad, $\varphi = 25^g$, und es solle das Gewicht p bestimmet werden, welches die 100 Pfund in Gleichgewicht halten kann, so ist

$$p = \frac{C. \mathfrak{S}\,\omega}{\mathfrak{S}'\varphi}$$

oder im gegenwärtigen Falle

$$p = \frac{100. \mathfrak{S}\,35^g}{\mathfrak{S}'\,25^g}$$

folglich $\mathfrak{L}\,p = \mathfrak{L}\,100 + \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\,35^g - \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}'\,25^g$

oder

oder $\mathfrak{L}p = \mathfrak{L}\,100 + \mathfrak{L}\mathfrak{S}\,35^g + \mathfrak{A}\mathfrak{L}\mathfrak{S}'\,25^g$

$$\mathfrak{L}\,100 = 2{,}0000000$$
$$\mathfrak{L}\mathfrak{S}\,35^g = 9{,}7585913$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{L}\mathfrak{S}'\,25^g = 6{,}0427243$$
$$\mathfrak{L}p = 1{,}8013156$$

Folglich $p = 63\tfrac{29}{100}$ Pfund.

Also siehet man aus der Rechnung, daß mit den gegebenen Winkeln ein Gewicht von $63\tfrac{29}{100}$ Pfund ein anderes von 100 Pfund in Gleichgewicht halten kann.

Zusatz. Es ist schon im vorigen Paragraph bemerket worden, daß die Kraft am vortheilhaftesten angebracht werde, wenn ihre Richtung mit der schiefen Ebne parallel ist. Wäre dieses der Fall, so würde in voriger Rechnung der Winkel $\varphi = 0$ werden, und dann bekäme die Rechnung folgende Gestalt

$$p = \frac{100.\ \mathfrak{S}\,35^g}{\mathfrak{S}'\,0^g}$$

oder $$p = \frac{100.\ \mathfrak{S}\,35^g}{\mathfrak{S}\,90^g}$$

$$\mathfrak{L}p = \mathfrak{L}\,100 + \mathfrak{L}\mathfrak{S}\,35^g - \mathfrak{L}\mathfrak{S}\,90^g$$
$$\mathfrak{L}\,100 = 2{,}0000000$$
$$\mathfrak{L}\mathfrak{S}\,35^g = 9{,}7585913$$

Summe $11{,}7585913$

$$\mathfrak{L}\mathfrak{S}\,90^g = 10{,}0000000$$

Rest $1{,}7585913 = \mathfrak{L}p$

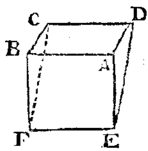
folglich $p = 57\tfrac{36}{100}$ Pfund.

Bei

Bei der parallelen Richtung brauchen wir also ohngefähr 6 Pfund weniger Gegengewicht als bei dem Winkel von 25 Graden, welchen vorher die Richtung des Strickes mit der schiefen Ebene bildete.

§. 21.

Mit der schiefen Ebne hat der Keil Verwandschaft. Ein Keil ist ein dreieckigtes Prisma, wie ABCDEF,



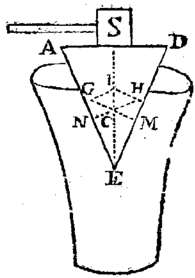
welches man in eine Spalte hineintreibet, um die zwei Theile eines Körpers von einander zu entfernen oder gänzlich zu trennen. Manchmal brauchet man auch den Keil, um einen Körper gegen einen andern fest anzudrücken, oder auch um einen horizontal liegenden Balken oder sonst einen Körper ein wenig in die Höhe zu treiben. Das Parallelogramm ABCD ist der Kopf oder die Basis des Keils, und empfängt den Druck oder den Schlag der Kraft. Die Parallelogramme ABFE und DCFE sind die Seiten des Keils, und wirken auf die Theile des Körpers, welchen man spalten will. Bei EF ist die Schärfe oder Spitze des Keils. Einige Mechaniker betrachten den Keil als eine Zusammensetzung von zwei schiefen Ebnen ABFE und DCFE.

§. 22.

Wenn eine Kraft, die auf den Kopf des Keils wirket, mit dem Widerstande beider Theile des Körpers, die gegen die Seiten des Keiles drücken, in Gleichgewicht sein soll, so müssen nothwendig die Kraft und beide Resistenzen in solchen Linien wirken, daß die Richtungen in einer Ebene liegen. Ferner widerstehen die Theile des Körpers, indem sie senkrecht gegen die Seiten des Keils drücken. Folglich muß die Ebene, in welcher sich alle drei Richtungslinien befinden, senkrecht sein, sowohl gegen die Basis des Keils, als auch gegen dessen Seiten. Diese Ebene wird demnach ein Dreieck sein, welches mit den Dreiecken ADE und BCF (vor. Fig.) welche den Keil begränzen, gleich und parallel ist; und da die Wirkungen der Kraft und beider Resistenzen sich in diesem Dreieck vereinigen, so kann man sich vorstellen, daß der ganze Keil nur wie ein bloßes Dreieck wirket.

§. 23.

Wenn die Kraft, welche auf den Kopf des Keils wirket, mit beiden Resistenzen das Gleichgewicht halten soll, so muß sich die Kraft zur Summe beider Resistenzen verhalten, wie sich die Breite des Kopfs zur Summe der Seitenlinien des Keils verhält.



Es sei der Keil AED zwischen beide Theile M und N eines Körpers eingedrungen, und man verlange zu wissen, wie groß die Kraft S sein muß, um beiden Resistenzen das Gleich-

Gleichgewicht zu halten. Lasset uns diese Resistenzen, welche in M und N gegen den Keil wirken, mit R und R′ bezeichnen. MG und NH sind die auf die Seiten senkrechten Richtungen der Resistenzen, welche irgendwo in einem Punkte C einander begegnen. Es mögen die Theile CG und CH die Größen und Richtungen ~~der~~ Resistenzen der
R und R′ vorstellen. Man vollende das Parallelogramm CGIH, so erfordert das Gleichgewicht, daß die Kraft S der zusammengesetzten CI gleich und gerade entgegengesetzet sei. Die drei Mächte S, R und R′ müssen sich demnach verhalten wie die drei Linien CI, CG, CH; oder, weil CH = GI, wie die drei Linien CI, CG, GI. Diese drei Linien aber verhalten sich wie AD, DE und AE; denn die Dreiecke ADE und CGI sind ähnlich, weil die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht sind. Folglich bekömmt man diese Proporzionen:

$$S : R : R' :: AD : DE : AE$$

daher $S : AD :: R : DE$

$S : AD :: R' : AE$

daher $S : AD :: (R + R') : (DE + AE)$

oder $S : (R + R') :: AD : (DE + AE)$

Zusatz I. Aus dem gefundenen Verhältnisse siehet man, daß der Keil desto mehr Wirkung thut, je weniger Breite der Kopf in Vergleich mit den Seiten hat.

Zusatz II. Der Gebrauch des Keils ist sehr mannichfaltig, indem hierher gerechnet werden können alle Nägel, Nadeln, Scheeren, Schwerdter, Aexte, Meissel, auch selbst die Zähne der Menschen und Thiere.

Zusatz III. Wir haben die Berechnung der Kraft, welche den Keil treibet, so angestellet, als wenn die Kraft nur bloß mit beiden Resistenzen das Gleichgewicht halten sollte, und in dieser Voraussetzung könnte anstatt der Kraft S allenfalls ein Gewicht auf den Kopf des Keiles geleget werden. Ueberhaupt, wenn vom bloßen Gleichgewichte die Rede ist, wo die Kräfte nur gegen einander einen Druck ausüben, so können sie allemal durch Gewichte vorgestellet werden. Hingegen kann diese Vorstellung nicht mehr statt finden, sobald die Kraft, wie meistens beim Keile geschiehet, durch einen Schlag wirket. Denn der Schlag des geringsten Körpers thut mehr als der bloße Druck einer sehr großen Masse. Es wird bekanntermaßen die Kraft gemessen durch das Produkt der Masse und der wirklichen oder virtuellen Geschwindigkeit. So klein also die Masse eines schlagenden Körpers auch sein mag, so wird dessen Kraft doch schon merklich groß, wenn diese Masse auch nur mit einer mittelmäßigen Geschwindigkeit multipliziret wird. Hingegen, wenn eine Masse bloß durch ihre Schwere drücket, so ist ihre virtuelle Geschwindigkeit keine andere, als diejenige, mit welcher sie anfangen würde zu fallen, wenn sie frei wäre. Die anfängliche Geschwindigkeit eines fallenden Körpers ist aber unendlich klein, indem ein fallender Körper nur allmälig eine immer zunehmende Geschwindigkeit erhält. Wenn man demnach eine sehr große Masse mit dieser unendlich kleinen virtuellen Geschwindigkeit multipliziret, so kann keine beträchtliche Kraft herauskommen. Kein Wunder also, daß ein kleiner Hammer, mit welchem man einen Nagel in ein Stück Holz von oben herunter hineintreibet, mehr Wirkung thut, als wenn man auf den Kopf des Nagels ein Gewicht von einigen Zentnern ganz sachte auflegte.

Zusatz IV. Hieraus läßt sich demnach begreifen, wie die Wirkung des Keils so groß sein kann, daß er die allerhärtesten Körper zerspalter. Denn, wie wir gesehen haben, ist die Gestalt des Keiles selbst schon im Stande, die

Wir-

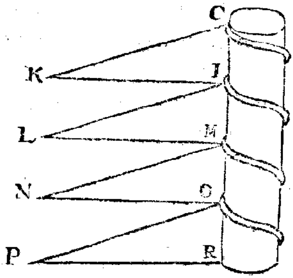
Wirkung der Kraft merklich zu vergrößern, wenn diese auch nur bloß ein darauf liegendes Gewicht wäre. Anstatt dessen aber gebrauchet man einen Hammer, der durch seinen Fall aus einer gewissen Höhe eine merkliche Geschwindigkeit erhält, welches den Schlag sehr verstärket. Ferner wird die Geschwindigkeit des Hammers durch die Kraft des Menschen, der ihn regieret, noch sehr vergrößert. Hierzu kömmt endlich noch der Stiel des Hammers, welcher so zu sagen den Arm des Menschen verlängert, und verursachet, daß der Hammer höher gehoben werden, einen größeren Bogen beschreiben, und folglich mehr Geschwindigkeit bekommen kann.

§. 24.

Eine Aehnlichkeit mit der schiefen Fläche finden wir wiederum in der Schraube. Diese ist eine Maschine, welche gemeiniglich aus zwei Zylindern von gleichem Durchmesser bestehet. Der eine ist dicht, und mit einer erhabenen Schneckenlinie umgeben, welche sich gleichförmig um ihn herum windet. Der andere ist hohl, und in demselben ist eine ähnliche Schneckenlinie wie eine Rinne eingegraben oder ausgehöhlet, so daß das Erhabene am ersten Zylinder genau in das Hohle des zweiten hineinpasset, und daß der dichte Zilinder im hohlen allmälig herumgedrehet werden kann, indem er zugleich immer weiter und weiter hineindringet. Der dichte Zylinder wird die **Schrauben-Spindel** genannt, und der hohle die **Schrauben-Mutter**. Ein Theil der Schneckenlinie, woraus die Schraube bestehet, wenn man ihn von einem beliebigen Punkte, bis dahin rechnet, wo er wiederum der geraden Linie begegnet, welche durch den vorigen Punkt mit der Axe des Zylinders parallel gezogen wird, ist ein **Schraubengang**. Derjenige Theil der besagten geraden Linie, welcher den Anfang und das Ende eines Schraubenganges verbindet, ist eine Stufe der Schraube, und bestimmet die Höhe der Schraubengänge.

§. 25.

Die Schraubengänge können als schiefe Ebenen betrachtet werden. Denn wenn man die rechtwinklichten



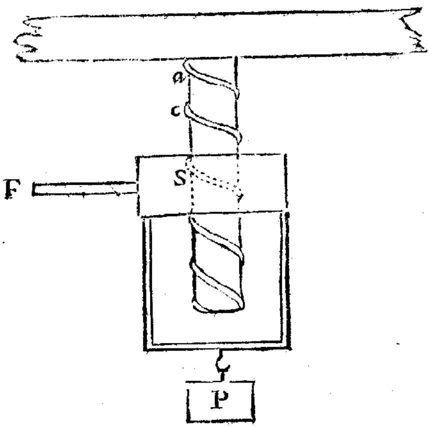
Dreiecke CKI, ILM, MNO, OPR, deren Grundlinien IK, ML, ON, RP dem Umfange des Zylinders gleich sind, und deren Höhen IC, MI, OM, RO so groß sind als die Stufen der zu machenden Schraube, um den Zylinder herumwickelt, so werden die Hypotenusen CK, IL, MN, OP Schraubengänge bilden, welche mit denen einer gewöhnlichen Schraube ähnlich sein werden. Folglich sind die Schraubengänge als schiefe Ebenen zu betrachten, die einander vollkommen ähnlich und gleich sind, deren Länge die Länge eines Schraubenganges beträgt, deren Grundlinie dem Umfange des Zylinders gleich ist, und deren Höhe so viel als eine Stufe der Schraube ausmachet.

§. 26.

Man gebrauchet die Schraube samt ihrer Schrauben-Mutter um einen Körper zusammenzudrücken, wie bei einer Presse geschiehet. Man kann sie aber auch gebrauchen,

um

um eine Last zu heben. Die Wirkung und das Verhältniß der Kraft zur Resistenz ist in beiden Fällen einerlei. Die Kraft F, welche die Maschine beweget, ist gewöhnlicher Weise an einer Stange oder einem Handgriffe angebracht, welcher entweder die Schraube herumdrehet, indem die Schrauben-Mutter unbeweglich bleibet, oder welcher die Schrauben-Mutter herumdrehet, unterdessen daß die Spindel fest und unbeweglich ist. Man mag aber



entweder die Schrauben-Mutter um die Spindel, oder die Spindel in der Schrauben-Mutter herumdrehen, so sind es allemal zwei schiefe Ebenen, wovon die eine auf der anderen gleitet, und in einem Falle wie im andern wird eine gleiche Kraft erfordert, um eine gewisse Resistenz in Gleichgewicht zu halten. Wenn wir also das Verhältniß zwischen beiden nur für den einen Fall bestimmen, so muß es zugleich auch für den andern gelten. Wir nehmen dabei

bei überhaupt an, daß die Resistenz oder die Last in einer Richtung wirket, welche mit der Axe der Spindel parallel ist, und daß die Kraft F allemal eine Richtung nimmt, welche gegen die Stange oder den Handgriff senkrecht, und zugleich mit den Grundflächen des Zylinders parallel ist.

§. 27.

Bei der Schraube verhält sich die Kraft zur Resistenz, die sie in Gleichgewicht hält, wie die Höhe einer Stufe der Schraube zu einem Umkreise, dessen Halbmesser so groß ist, als die Entfernung der Kraft von der Axe der Spindel.

Um dieses zu beweisen, wollen wir, wie bei voriger Figur, annehmen, daß die Spindel fest sei, und das Gewicht an der beweglichen Schraubenmutter hänge. Es ist klar, daß die Schraubengänge der Spindel von den Schraubengängen der Schraubenmutter gedrücket werden, indem das Gewicht P sich bestrebet, die Schraubenmutter herunterzuziehen. Jeder Punkt der Schraubenmutter, der einen Punkt der Spindel drücket, kann nun als ein Gewicht betrachtet werden, welches auf einer schiefen Ebene geleget ist. Daher siehet man, daß die Schraubenmutter nothwendig in Bewegung gerathen muß, wenn sonst nichts hindert; eben so wie ein schwerer Körper, welchen man auf eine schiefe Ebene stellet, herunter läuft, wenn keine Kraft vorhanden ist, die ihn zurückhält. Wir können uns demnach vorstellen, das Gewicht P sei in unendlich viel Gewichtchen *p*, *p*, *p* &c. zertheilet, welche die Schraubengänge der Spindel drücken, und es kömmt darauf an, daß man die Kraft bestimme, welche nöthig ist, um diese Gewichtchen zurückzuhalten, daß sie nicht längs den Schraubengängen hinuntergleiten. Gesezt man gebrauchte für jedes Gewichtchen *p* eine Kraft *s*, deren Richtung mit der Grundlinie der schiefen Ebene parallel wäre,

welche

welche vom Schraubengange gebildet wird, so müßte sich jedes Kräftchen s zum Gewichtchen p verhalten wie die Höhe der schiefen Ebene zu deren Grundlinie (§19) das heißt, wie die Höhe einer Stufe der Schraube zum Umfange des Zylinders. Folglich wird sich auch die Summe aller Kräftchen s, s, s &c. zur Summe aller Gewichtchen p, p, p &c verhalten, wie eine Stufe ca der Schraube zum Umfange der Spindel, und eben so wird sich demnach die ganze Kraft S zum ganzen Gewichte P verhalten. Bezeichnen wir nun die Stufe ca mit h, und den Umfang des Zylinders mit c, so haben wir folgendes Verhältniß

$$S, P :: h, c$$

Bisher wurde angenommen, daß die Kräftchen s, s, s &c. am Umfange der Spindel selbst angebracht wären, und folglich müßte auch die ganze Kraft S daselbst angebracht werden, so daß ihre Entfernung von der Axe des Zylinders dem Halbmesser des Zylinders gleich wäre. Wir wollen aber jetzt annehmen, daß die Kraft am Ende einer Stange wie in F wirke. Nun siehet man leicht ein, daß eben so viel Kraft nöthig ist, um entweder die Last P oder auch die Kraft S in Gleichgewicht zu halten, weil nämlich S so viel Wirkung thut als P. Wenn nun eine Kraft in F und eine andere S am Umfange der Spindel angenommen werden, die einander das Gleichgewicht halten sollen, so sind beide Kräfte in dem nämlichen Falle, als wenn der Zylinder eine Winde wäre, vermittelst welcher die Mächte S und P gegen einander wirken. Folglich (§10) verhält sich die Kraft F zu S wie der Umfang des Zylinders zum Umfange des Kreises, welchen die Kraft F beschreiben würde, wenn sie sich ganz um den Zylinder herum bewegte. Dieser Kreis hat aber zum Halbmesser die Entfernung der Kraft F von der Axe des Zylinders. Lasset uns diesen Umfang mit C bezeichnen, so haben wir folgende Proporzion

$$F, S :: c, C$$

Dieses Verhältniß giebt

$$F \times C = S \times c$$

das vorige gab $P \times h = S \times c$

folglich ist $F \times C = P \times h$

oder $F, P :: h, C$

Diese lezte Porporzion, wenn man sie in Worten ausdrücket, giebt den Lehrsaz, welchen zu beweisen wir uns vorgenommen hatten.

Zusatz. Hieraus kann man abnehmen, daß die Wirkung der Schraube sehr groß ist, zumalen wenn die Gänge sehr eng an einander sind, und wenn der Hebel etwas lang ist. Es sei zum Exempel jede Stufe $= \frac{1}{3}$ Zoll. Die Länge des Hebels bis zur Axe der Spindel gerechnet sei 16 Zoll, so wird der Umkreis eines Zirkels, der 16 Zoll zum Halbmesser oder 32 Zoll zum Durchmesser hat, ohngefähr $100\frac{4}{7}$ Zoll betragen. Nun sei die Kraft, welche am Ende des Hebels wirket, $= 25$ Pfund, und man verlange die Last zu wissen, welche mit dieser Kraft das Gleichgewicht halten kann, so gebrauchen wir die gefundene Proporzion, und sagen

$$h, C :: F, P$$

oder im gegenwärtigen Falle

$$\tfrac{1}{3}, 100\tfrac{4}{7} :: 25, P$$

suchet man nun P nach der Regel-Detri, so findet man $P = 7542\frac{6}{7}$. So viel Pfund könnten demnach vermittelst der angegebenen Schraube von einer 25pfündigen Kraft in Gleichgewicht gehalten werden. Wenn die Last nicht bloß in Gleichgewicht gehalten, sondern wirklich beweget werden soll, so benimmt die Reibung einen merklichen Theil von der Wirkung der Kraft, indem der ganze Theil

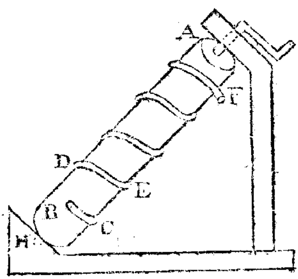
der

der Schraube, der in der Schraubenmutter lieget, einer starken Reibung unterworfen ist. Hingegen bei dem bloßen Gleichgewichte hat die Reibung nichts zu bedeuten, indem sie zugleich sowohl der Kraft als auch der Resistenz widerstehet.

Anmerkung. Verschiedene Mathematiker wollen die Schraube nicht mit unter die einfachen Maschinen rechnen, weil sie eine Zusammensetzung verschiedener schiefer Ebenen ist. Hingegen läßt sich dawider einwenden, daß diese Zusammensetzung nicht wirklich, sondern bloß idealisch ist. Es ist nur eine Art wie man die Schraube betrachtet, um deren Wirkung desto besser zu erklären. Ueberhaupt aber gilt es gleich viel, man mag eine Maschine für einfach oder für zusammengesezt halten. Die Wirkung derselben wird dadurch weder vermindert noch vermehret.

§. 28.

Die Archimedische Schraube, welche also genannt worden, weil Archimedes der Erfinder derselben ist, bestehet in einer hohlen Röhre, welche um einen Zylinder AH schneckenförmig herumgewunden ist, so daß sie wirkliche Schraubengänge bildet. Der Zylinder machet mit dem



Hori-

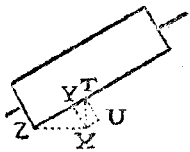
Horizont einen Winkel von ohngefähr 45 Graden. Er drehet sich auf zwei Zapfen bei A und bei H, vermittelst eines Handgriffes, welcher am oberen Zapfen befestiget ist. Wenn man nun in die untere Oeffnung B der Röhre eine bleierne Kugel oder sonst einen schweren Körper hineinleget, und die Schraube herumdrehet, so daß sich der Punkt B erhöhe, so muß die Kugel, vermöge ihrer Schwere, von B nach C heruntergleiten. Fähret man nun fort zu drehen, so erhebet sich der Punkt C, und der Punkt D kömmt unterwärts, so daß aus der nämlichen Ursach die Kugel alsdann nach D herunter gleitet. Wenn man weiter drehet, so kömmt die Kugel aus den nämlichen Gründen in E, und so durchläuft sie nach und nach die ganze Länge der Schraube, bis sie endlich bei F herausfällt, wo man sie in ein Gefäß auffangen kann. Stellet man den unteren Theil der Schraube ins Wasser, so läßt sich leicht begreifen, daß die Oeffnung B bei jeder Umwendung etwas Wasser auffängt, und daß dieses Wasser eben so wie vorher die Kugel bis in F steiget, wo es herausläuft und in ein Gefäß aufgefangen werden kann, von wo man es vermittelst einer schief liegenden Rinne oder Röhre, wohin man will, ableitet. Daher läßt sich diese Maschine gut gebrauchen, um das Wasser aus einem Graben abzuleiten.

§. 29.

Bei der archimedischen Schraube verhält sich das Produkt aus der Kraft und dem Sinustotus zum Produkte aus der Resistenz und dem Sinus des Neigungs-Winkels, wie sich die Schraubenstufe verhält zum Umkreise, den die Kraft beschreibet.

(Siehe die folgende Figur.)

Es



Es sei XZ die horizontale Linie, mit welcher die archimedische Schraube den Winkel TZX machet, das Gewicht sei in T, und die lothrechte Linie TX mag dessen Schwere vorstellen. Fälle XY senkrecht auf TZ, und vollende das Parallelogramm UY, so zerleget sich die Kraft TX in zwei andern TU oder YX und TY. Die Kraft TU wird durch den Widerstand des Gestelles vernichtet, worin die Zapfen der Schraube gehen. Folglich bleibet nur die Kraft TY, die mit der Axe der Schraube parallel wirket, welches auf den Fall der gemeinen Schraube zurückführet. Es sei Q das ganze Gewicht, und R der Theil desselben, der in der Richtung TZ wirket, so ist (§ 27) wenn man die Kraft mit F, die Stufe mit h, und den von der Kraft beschriebenen Umkreis mit C bezeichnet,

$$F, R :: h, C$$

Es sei der Sinustotus r, so ist

$$Q, R :: TX, TY :: r, \mathfrak{S}(\angle TXY)$$

Es ist aber $\angle TXY = \angle TZX$, weil die senkrechte XY das rechtwinklichte Dreieck TXZ in zwei ähnliche Dreiecke zertheilet. Also ist

$$Q, R :: r, \mathfrak{S}(\angle TZX)$$

oder, wenn wir den Neigungswinkel mit φ bezeichnen,

$$Q, R :: r, \mathfrak{S}\varphi$$

daher

$$\text{daher} \quad R = \frac{Q \cdot S\varphi}{r}$$

setzen wir diesen Werth von R in die obige Proporzion,

$$\text{so ist} \quad F, \frac{Q\, S\varphi}{r} :: h, C$$

$$\text{oder} \quad (F.r), (Q.S\varphi) :: h, C$$

Zusatz I. Wird der Sinustotus $= 1$ angenommen,

$$\text{so ist} \quad F, (Q. S\varphi) :: h, C$$

wir haben demnach das nämliche Verhältniß wie bei der gemeinen Schraube, außer daß die Resistenz mit dem Sinus des Neigungswinkels multipliziret werden muß.

Zusatz II. Ist Wasser anstatt eines Gewichts in der Röhre, so bedeutet Q das Gewicht alles in der Röhre enthaltenen Wassers.

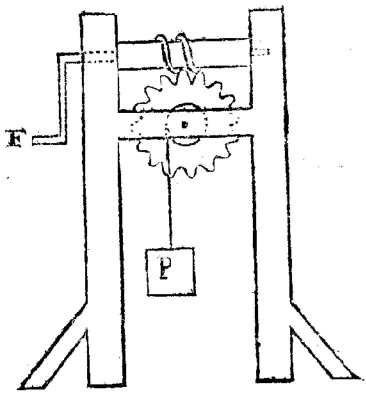
Anmerkung. Die gegebene Regel ist so einfach und so klar, daß es mich wundert, solche in keinem Buche angetroffen zu haben. Sollte ich der Erfinder derselben sein, so haben vermuthlich meine Vorgänger dasjenige zu weit gesuchet, was ganz in der Nähe war, wie es oft genug zu geschehen pfleget.

§. 30.

Eine Schraube ohne Ende ist eine Maschine, welche aus einer gewöhnlichen Schraubenspindel bestehet, deren Schraubengänge in die Zähne eines Rades eingreifen. Durch die Mitte des Rades gehet ein Zylinder, um welchen ein Strick gewickelt ist, und an diesem Stricke hänget die Last, welche man hinaufwinden will. Die Schraube gehet auf zwei Zapfen, und am Ende des einen ist ein Handgriff, woran die Kraft angebracht wird.

Bei

Bei dieser Maschine verhält sich die Kraft zur Resistenz, wie das Produkt aus dem Halbmesser des Zylinders und aus der Höhe der Schraubenstufe, zum Produkte aus dem Halbmesser des Rades und dem Umkreise, welchen die Kraft beschreiben würde, wenn sie sich bewegte.



Es sei F die Kraft, welche sich bestrebet die Schraube herumzudrehen, P das Gewicht, welches am Zylinder hängt, S die Wirkung des Zahnes wider den Schraubengang. Es sei ferner h die Höhe der Schraubenstufe, R der Halbmesser des Rades, r der Halbmesser der Welle oder des Zylinders, C der Umkreis des Zirkels, welchen die Kraft F zu beschreiben sich bestrebet.

Da bei der Schraube im Falle des Gleichgewichtes die Kraft sich zum Druck verhält, welcher gegen die Schraubenbengänge in einer mit der Axe parallelen Richtung ausgeübet wird, wie eine Stufe zum Umkreise, den die Kraft beschreibet, so ist $F, S :: h, C$

und da der Schraubengang den Zahn eben so stark drükket, als er von ihm gedrücket wird, so wird das Rad an seinem Umfange durch eine Kraft zur Bewegung gereizet, welche der Kraft S gleich ist.

Das Rad mit seiner Welle bildet eine Winde, und in dieser verhält sich die Kraft S zur Last P, wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades. Folglich ist $S, P :: r, R$

Diese Proporzion giebt

$$S = \frac{P.r}{R}$$

die vorige gab $$S = \frac{F.C}{h}$$

Folglich ist $$\frac{P.r}{R} = \frac{F.C}{h}$$

oder $P.r.h = F.C.R$

daher $F, P :: r.h, R.C$

welches Verhältniß nichts anders ist, als der Lehrsatz, welchen wir beweisen wollten.

Es sei zum Exempel

$r = 2$ Zoll,
$R = 8$ Zoll,
$h = \frac{1}{6}$ Zoll,
$C = 20$ Zoll,
$P = 2000$ Pfund.

und

und es werde die Kraft F verlanget, welche mit den 2000 Pfunden das Gleichgewicht halten kann, so ist

$$F, 2000 :: \frac{1}{6} \times 2, \; 20 \times 8$$

folglich ist $F = \dfrac{2000 \times \frac{1}{6} \times 2}{20 \times 8}$

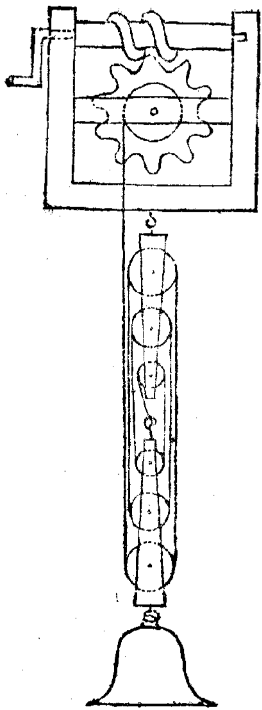
oder $F = 4\frac{1}{6}$ Pfund,

so daß eine Kraft, welche ohne Hülfsmittel nur $4\frac{1}{6}$ Pfund in Gleichgewicht halten könnte, vermöge der angeführten Maschine 2000 Pfund in Gleichgewicht halten kann.

§. 31.

Obgleich die Schraube ohne Ende der Kraft schon einen merklichen Vortheil verschaffet, so läßt sich doch, erforderlichen Falls, die Wirkung derselben durch einen Flaschenzug noch merklich vermehren. Nämlich, man bringe an dem Gestelle der Schraube ohne Ende, oder an einem andern Orte in der Nähe einen Kloben mit zwei oder drei Rollen an. Die aufzuhebende Last befestige man ebenfalls an einem ähnlichen Kloben. Das Strick, welches um die Welle des Rades herumgehet, führe man um die untere Rolle des beweglichen Klobens herum, dann über die obere Rolle des unbeweglichen Klobens, und so weiter, wie bei dem gewöhnlichen Flaschenzuge. Wenn man alsdann den Handgriff, oder die sogenannte Kurbel herumdrehet, so treibet die Schraube das Rad sammt der Welle herum. Die Welle ziehet das Strick aufwärts, sammt dem untern Kloben, und dem daran befestigten Ge-

(Siehe die folgende Figur.)



wichte. Will man die Wirkung einer solchen Maschine berechnen, so rechne man erstlich aus, welche Resistenz die Kraft vermöge der Schraube ohne Ende allein im Gleichgewicht zu halten vermag. Das gefundene Resultat multiplizire man noch mit der Anzahl der gespannten Stricke, so kömmt die ganze Last heraus, welche durch die gegebene Kraft in Gleichgewicht gehalten werden kann.

Laßt

Laßt uns annehmen, die Kraft betrage nur 10 Pfund. Die Länge der Kurbel 18 Zoll, so beschreibet die Kraft einen Zirkel, welcher 36 Zoll zum Durchmesser hat, und dessen Umkreis ohngefähr 113 Zoll beträgt. Die Schraubenstufe sei $\frac{1}{2}$ Zoll. Der Halbmesser des Rades sei 12 Zoll und der Halbmesser der Welle 2 Zoll. Wirkte nur bloß die Schraube ohne Ende, so würde sich die Kraft zur Resistenz verhalten, wie das Produkt aus der Schraubenstufe und dem Halbmesser der Welle, zum Produkte aus dem Halbmesser des Rades, und dem Umkreise, welchen die Kraft beschreibet, folglich bekäme man

$$10, x :: \left(\frac{1}{2} \times 2\right), (12 \times 113)$$

daher $$x = \frac{10 \times 12 \times 113}{\frac{1}{2} \times 2}$$

Dieses wäre der Widerstand, welchen das Strick an der Welle in Gleichgewicht halten könnte, und so groß wäre auch folglich die Wirkung der Kraft in diesem Stricke.

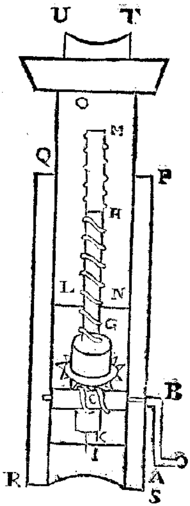
Man kann sich also vorstellen, das Strick werde durch eine solche Kraft aufwärts gezogen. Hat nun der Flaschenzug sechs parallele Stricke, so kann die Kraft sechsmal ihren eigenen Werth in Gleichgewicht halten. Folglich wird die Größe der ganzen Last, welche die zehnpfündige Kraft im jeßigen Falle in Gleichgewicht halten kann,

$$\frac{10 \times 12 \times 113 \times 6}{\frac{1}{2} \times 2} = 81360 \text{ Pfund.}$$

Woraus man siehet, wie erstaunend groß die Wirkung einer solchen Maschine ist. Einige haben sie die Archimedische Maschine genannt, weil sie vermuthet haben, daß sich Archimedes derselben bedienet habe, um die schweresten Lasten aus den Schiffen zu heben.

§. 32.

Die Schraube ohne Ende kann auch mit Vortheil gebrauchet werden, um eine sehr wirksame und von der schon erwähnten (§ 17) verschiedene Wagenwinde zu verfertigen. Nämlich ein Handgriff BA drehet einen eisernen Stab herum, welcher in der Mitte C ein Paar Schraubengänge hat. Diese treiben ein horizontales Rad herum. Das Rad hat eine Welle KG. Die Welle



endiget sich unterwärts in einen Zapfen KI, der sich in einem Loche drehet, welches in dem Gestelle gemachet ist. Das andere Ende der Welle ist mit einer Schraubenspindel GH verbunden, so daß sich diese Spindel samt der Welle und dem Rade um ihre Axe herumdrehet. Die Schraubenspindel gehet in einer Schraubenmutter LM, und diese ist in einem viereckigten Prisma NO eingegraben, welcher

welcher sich in dem Gestelle PQRS zwar auf- und niederwärts bewegen läßt, jedoch ohne sich um seine Axe drehen zu können, weil die Wände des Gestelles es verhindern. Wird nun das untere Ende SR der Maschine an der Erde auf einen Balken oder Stein gestüßet, und wird das obere Ende TU des beweglichen Prisma unter die Axe oder sonst einen Theil eines eingesunkenen Wagens oder unter sonst eine Last gestellet, welche in die Höhe getrieben werden soll, so darf man nur den Handgriff AB herumdrehen. Alsdann, da die Schraube GH, welche sich auch zu gleicher Zeit drehet, aus ihrem Orte nicht weichen kann, so wird sie die Schraubenmutter samt dem Prisma NO und der auf dem Ende TU liegenden Last in die Höhe treiben, bis die Schraubenmutter das Ende der Spindel erreichet hat. Da dann die Last schon eine kleine Strecke in die Höhe getrieben ist, so kann man Stüßen darunter stellen, und wenn es nöthig ist, auch die Wagenwinde auf eine etwas erhöhete Stüße stellen, um sie noch einmal anzusetzen.

Anmerkung. Diese sehr wirksame Maschine habe ich nach einem Modell beschrieben, welches mir davon zugestellet worden. In Büchern pfleget man sie nicht zu finden.

§. 33.

Bei der angeführten Wagenwinde verhält sich die Kraft zur Resistenz wie das Produkt der Stufen-Höhen beider Schrauben, zum Produkte aus dem Umkreise des Rades und dem Umkreise, welchen die Kraft beschreibet.

Es sei A die Kraft, welche am Ende des Handgriffs die Schraube ohne Ende herumdrehet, β der Umkreis, welchen diese Kraft beschreibet, γ die Stufen-Höhe der

Schraube ohne Ende, Δ die Resistenz, welche diese erste Schraube für sich allein in Gleichgewicht halten kann,

so ist $\gamma, \beta :: A, \Delta$

daher $\Delta = \frac{A.\beta}{\gamma}$

und das Rad wird durch eine Kraft $= \Delta$ herumgetrieben.

Es sei ferner ε der Umkreis des Rades, und mithin auch der Umkreis, den die Kraft Δ beschreibet, ι die Stufe der vertikalen Schraube, und k die Resistenz, welche die ganze Maschine niederwärts drücket,

so ist $\iota, \varepsilon :: \Delta, k$

daher $k = \frac{\Delta.\varepsilon}{\iota}$

nun war $\Delta = \frac{A.\beta}{\gamma}$

folglich $k = \frac{A.\beta}{\gamma}.\frac{\varepsilon}{\iota}$

oder $k\gamma\iota = A\beta\varepsilon$

daher ist $A, k :: \gamma\iota, \beta\varepsilon$

Es sei z. E. die länge des Handgriffs $= 6$ Zoll, so beschreibet derselbe einen Umkreis, der 12 Zoll zum Durchmesser hat. Dieser Umkreis beträgt ohngefähr $37\frac{5}{7}$ Zoll $= \frac{264}{7}$ Zoll. Der Durchmesser des Rades sei 4 Zoll, so beträgt dessen Umkreis ohngefähr $\frac{88}{7} = 12\frac{4}{7}$ Zoll. Die Stufe der Schraube ohne Ende sei $\frac{1}{6}$ Zoll, und die Stufe der anderen Schraube $= \frac{1}{8}$ Zoll. Die Kraft am Handgriff sei 10 Pfund,

so ist $k = \frac{A.\beta.\varepsilon}{\gamma.\iota}$

und

und im gegenwärtigen Falle

$$k = \frac{10 \cdot \frac{264}{7} \cdot \frac{88}{7}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}}$$

$$k = \frac{10 \cdot 264 \cdot 88 \cdot 6 \cdot 8}{7 \cdot 7}$$

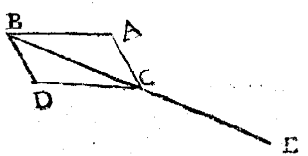
$$k = 227578\tfrac{38}{49}$$

Hieraus ist zu ersehen, was für eine erstaunende Gewalt diese nicht sehr zusammengesezte Maschine ausübet. Es ist zwar wahr, daß sie auch sehr viel Reibung leidet. Gesezt aber, man müßte wegen der Reibung die Kraft verdoppeln oder die Resistenz halbiren, so wäre dennoch die Wirkung bewundernswürdig.

§. 34.

Unter die einfachen Maschinen rechnen die neueren das bloße Strick, welches an beiden Enden gezogen wird, und zwischen seinen Enden ein Gewicht trägt. Sie nennen es die Seilmaschine (Machine funiculaire).

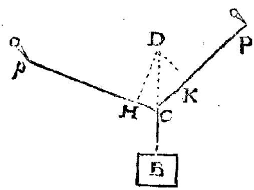
Ueberhaupt, alles was von dem Gleichgewichte verschiedener Kräfte gesaget werden kann, die auf einen und denselben Punkt wirken, gilt ebenfalls, wenn man anstatt dieses Punktes einen Knoten annimmt, in welchem sich verschiedene Stricke vereinigen.



Wenn drei Kräfte, deren Größen und Richtungen durch die Linien AC, CD und CE vorgestellet werden (vor. Fig.) auf den Punkt C wirken, so ist bekannt, daß sie einander das Gleichgewicht halten, so bald die dritte Kraft CE der Kraft CB gleich ist, welche aus den beiden übrigen entstehet. Anstatt des Punktes C gedenke man sich nun einen Knoten, woraus drei Stricke oder Fäden CA, CD und CE entspringen, welche in A, D und E durch drei Kräfte gezogen werden, deren Größen durch die nämlichen Linien CA, CD und CE vorgestellet sind, so wird ebenfalls der Knoten C in Gleichgewicht bleiben, weil es gleich viel ist, ob die drei Kräfte durch Stoßen oder durch Ziehen auf den Punkt C wirken.

§. 35.

Es seien nun die drei Stricke CP, C*p* und CB vermittelst eines Knotens in C verbunden, und am Ende des Strickes CB hänge man ein Gewicht B; die Enden der beiden übrigen Stricke befestige man mit Nägeln oder Haken in P und *p*, so trägt die Seilmaschine das Gewicht B,



welches den Knoten C in der Richtung CB ziehet, unterdessen daß dieser Knoten von den Nägeln P und *p* in den Richtungen CP und C*p* gezogen wird. Es findet hier also der im vorigen Paragraph angeführte Fall statt, daß nämlich der Knoten C zwischen drei Kräften P, *p* und B, die ihn ziehen, in Gleichgewicht bleibet.

Je

Je größer die Kraft ist, welche ein Strick ziehet, desto größer wird die Spannung des Strickes. Man kann also annehmen, daß die Spannungen der Stricke CP, Cp und CB sich verhalten wie die Kräfte P, p und B, von denen sie gezogen werden.

§. 36.

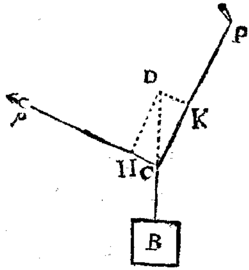
Die Spannungen jeder zwei von den drei Strikken, woraus die einfache Seilmaschine bestehet, verhalten sich umgekehrt wie die senkrechten Linien, welche auf beide aus einem Punkte in der Richtung des dritten Strickes gefället werden.

Denn, wenn der gemeinschaftliche Knoten in Gleichgewicht bleibet, so müssen sich jede zwei Kräfte, die ihn ziehen, verhalten, wie die senkrechten Linien DK und DH, die auf deren Richtungen aus einem Punkte D in der Richtung der dritten Kraft gefället werden (III H. §16). Da sich nun, wie kurz vorher gesaget worden, die Spannungen der Stricke verhalten wie die Kräfte, von denen sie gezogen werden, so verhalten sie sich wie die nämlichen senkrechten Linien.

§. 37.

Anstatt des einen Nagels kann auch sonst eine Kraft angebracht werden, um die Last entweder in Gleichgewicht zu halten, oder dieselbe etwas in die Höhe zu heben.

(Siehe die folgende Figur.)



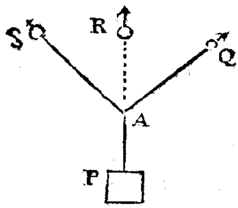
Zum Exempel, wenn das Strick CP an dem Nagel P befestiget ist, und die Last B am Stricke CB herunterhängt, so kann eine Kraft p vermittelst des Strickes Cp dieselbe seitwärts und zugleich etwas aufwärts ziehen. Die vorhergehende Proporzion bleibet aber allemal die nämliche. Die senkrechte Linie DK stellet die Kraft p oder die Spannung des Strickes Cp vor, und die andere senkrechte Linie DH stellet den Widerstand des Nagels P, oder die Spannung des Strickes CP vor.

Je mehr die Last B von der vertikalen Linie, die durch P gehet, abgewichen ist, desto größer wird DK in Vergleich mit DH. Woraus man siehet, daß die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft p immer in Betrachtung der Last B größer und größer wird, und daß folglich das Verhältniß der Kraft zur Resistenz sich bei jeder Lage der Seilmaschine verändert.

§. 38.

Anstatt des angeführten Verhältnisses kann man auch allgemeiner sagen, daß von drei Kräften, die vermittelst der Seilmaschine einander das Gleichgewicht halten, jede vorgestellet wird durch den Sinus des Winkels, den die Richtungen der beiden übri-

übrigen bilden, es mögen die Kräfte entweder wirksam oder bloß widerstehend sein, wie zum Exempel Nägel oder Haken.



Denn es sei R die Kraft, welche aus der Zusammensetzung beider Kräfte Q und S entstehet, so wissen wir schon, daß (III H. § 15)

R,Q, S :: SQAS, SRAS, SQAR

Im Falle des Gleichgewichts aber muß die Kraft P der zusammengesezten Kraft R gleich sein. Also P = R. Ferner ist SRAS = SPAS und SQAR = SQAP, weil der Sinus eines Winkels dem Sinus seines Supplements gleich ist. Folglich ist

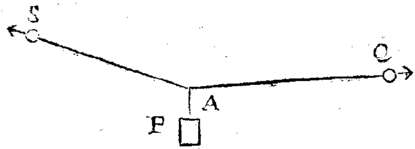
P, Q, S :: SQAS, SPAS, SQAP.

§. 39.

Es mag die Kraft P so klein, und die Kräfte Q und S mögen so groß sein als man will, so wird allemal bei A ein Winkel enstehen, vorausgesetzet, daß die drei Kräfte einen endlichen Werth haben.

(Siehe die folgende Figur.)

Gesezt

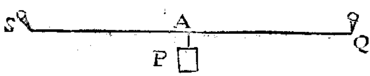


Gesezt die endlichen Kräfte Q und S mögen die Fäden QA und AS so stark anziehen als man will, und es hänge in A ein sehr kleines Gewicht P, so wird QAS nie eine gerade Linie werden. Denn es ist eben jetzt bewiesen worden, daß

Q, P :: 𝔖PAS, 𝔖QAS.

Wenn in diesem Verhältnisse die drei ersten Sätze endliche Größen sind, so wird auch der vierte Satz, nämlich 𝔖QAS, eine endliche Größe sein, folglich bekömmt auch der Winkel QAS eine endliche Größe, und also können QA und AS nicht in einer geraden Linie liegen.

Man merke wohl, daß dieser Beweis voraussetzet, daß die Kräfte Q und S etwas nachgeben können; denn wären die Enden Q und S eines Fadens zwischen zwei



Nägeln gespannt, die nicht weichen könnten, und wäre der Faden so beschaffen, daß er sich nicht ausdehnen könnte, so würde bei A kein Winkel entstehen.

Denn da angenommen wird, daß die Nägel nicht nachgeben können, so müssen sie als unendliche Kräfte betrachtet werden. Also in der Proporzion

Q, P, :: 𝔖PAS, 𝔖QAS

wird

wird Q unendlich groß, und die Proporzion bekömmt folgende Gestalt

$$\infty, P :: \mathfrak{S}PAS, \mathfrak{S}QAS$$

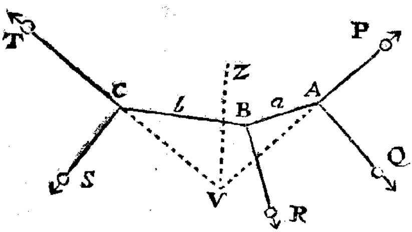
daher $$\mathfrak{S}QAS = \frac{P. \mathfrak{S}PAS}{\infty}$$

oder $$\mathfrak{S}QAS = 0$$

Da nun der Sinus des Winkels QAS null wird, so ist der Winkel von 180°, das heißt, QAS ist eine gerade Linie.

§. 40.

Lasset uns nun versuchen, die Bedingungen des Gleichgewichts zu bestimmen, wenn die Seilmaschine zusammengesetzet ist, so daß sie aus mehreren Knoten bestehet, und verschiedene Kräfte daran ziehen.



Es sei PABCT eine Seilmaschine, wo jeder Knoten nicht mehr als drei Fäden vereiniget. Es seien die Kräfte P, Q, R, S und T an den Enden der verschiedenen Fäden angebracht. Es sei a die Spannung des Fadens AB, und b die Spannung des Fadens BC, so können diese Spannungen als Kräfte betrachtet werden, welche auf die nächsten Knoten wirken.

Dieses vorausgesezt, so erfordert das Gleichgewicht, daß von den drei Kräften, die auf jeden Knoten wirken, jede

jede außerhalb des Winkels wirke, welchen die Richtungen der beiden übrigen bilden, um daß sie der aus beiden zusammengesezten Kraft entgegen wirken könne. Ferner erfordert noch das Gleichgewicht, daß jede von den drei Kräften, die auf einen Knoten wirken, durch den Sinus des Winkels vorgestellet werde, der zwischen den Richtungen der beiden übrigen enthalten ist. Diese Bedingungen sind unmittelbare Folgen aus den allgemeinen Lehren vom Gleichgewichte (III H. § 12 u. 15).

Für die Kräfte P, Q und a, welche den Punkt A ziehen, bekommen wir folglich diese Verhältnisse

$$P, Q, a :: \mathfrak{S}QAB, \mathfrak{S}PAB, \mathfrak{S}QAP.$$

desgleichen für den Punkt B

$$a, R, b :: \mathfrak{S}RBC, \mathfrak{S}ABC, \mathfrak{S}ABR.$$

und ebenfalls für den Punkt C

$$b, S, T :: \mathfrak{S}SCT, \mathfrak{S}BCT, \mathfrak{S}BCS$$

Dieses sind demnach die Bedingungen, ohne welche das Gleichgewicht zwischen den Kräften P, Q, R, S und T nicht statt finden kann. Anstatt der Kräfte P und T könnte man auch Nägel oder Haken annehmen, woran die äußersten Fäden gebunden werden. In diesem Falle würde der Widerstand jedes Hakens die Stelle einer Kraft vertreten, und die Quantität des Widerstandes würde der Spannung des angebundenen Fadens AP oder CT gleich sein.

§. 41.

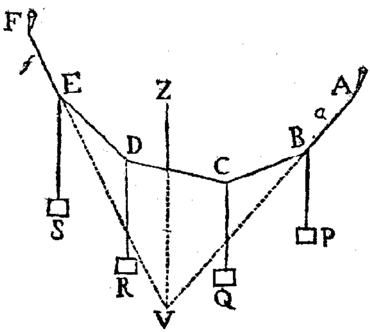
Da angenommen wird, daß die Kräfte P, Q, R, S und T, welche an der Seilmaschine ziehen, in Gleichgewicht sind, und da diese Maschine für sich selbst keine Wirkung hat, so muß die Kraft, die aus den Kräften P und T zusammengesezt ist, welche die äußersten Fäden halten,

der-

derjenigen Kraft gleich und entgegengesetzet sein, welche aus den Kräften Q, R und S zusammengesezt ist. Nun aber gehet die Richtung der aus P und T zusammengesezten Kraft nothwendig durch den Punkt V, wo beide Richtungen PA und TC verlängert einander begegnen. Gesezt also, diese zusammengesezte Kraft habe die Richtung VZ, so muß die aus Q, R und S zusammengesezte durch den Punkt V gehen, und die entgegengesezte Richtung ZV haben.

§. 42.

Wir wollen jezt annehmen, daß die beiden Enden einer Seilmaschine an zwei festen Punkten A und F gebunden sind, und daß die Richtungen aller Kräfte P Q, R, S vertikal nud folglich mit einander parallel sind, so wird man dabei folgendes beobachten:



1. Die aus den Kräften P, Q, R, S zusammengesezte Kraft ist der Summe derselben P + Q + R + S gleich, und der Richtung nach mit denselben parallel. Denn man kann diese zusammengesezte Kraft als die Kraft des gemeinsamen Schwerpunktes der Gewichte P, Q, R, S betrach-

trachten. In diesem Schwerpunkte sind aber alle einzelne Gewichte zusammen gleichsam vereiniget, und die Richtung des Schwerpunktes ist sowohl, als die Richtung der Gewichte selbst, vertikal.

2. Die gedachte zusammengesezte Kraft ist der aus den Widerständen der festen Punkte A und F zusammengesezten gleich und entgegengesezt. Denn die Widerstände dieser festen Punkte können als Kräfte betrachtet werden, die in den Richtungen BA und EF ziehen, und den Kräften P, Q, R, S das Gleichgewicht halten. Dieses Gleichgewicht erfordert aber, daß die aus A und F zusammengesezte Kraft der aus P, Q, R, S zusammengesezten gleich und entgegengesezt sei.

3. Es sei a die Spannung des Fadens BA, und f die Spannung des Fadens EF, so sind diese Spannungen den Kräften gleich, welche dieselben verursachen, folglich kann man auch sagen, daß die aus den Spannungen a und f zusammengesezte Kraft der aus den Kräften P, Q, R, S zusammengesezten gleich und gerade entgegengesezet sei.

4. Die aus den Spannungen a und f der äussersten Fäden BA und EF zusammengesezte Kraft gehet durch den Punkt V, wo die Verlängerungen dieser Fäden einander begegnen, und die Richtung ihrer Wirkung ist in der geraden Linie VZ, welche mit den Richtungen der Kräfte P, Q, R, S parallel ist. Daß sie durch den Punkt V gehet, ist deswegen klar, weil jede Kraft, die aus zweien zusammengesezet ist, durch den Punkt gehen muß, wo die Richtungen beider zusammentreffen. Daß die Richtung VZ mit den Richtungen der Kräfte P, Q, R, S parallel ist, erhellet daher, daß die aus diesen zusammengesezte Kraft mit gedachten Richtungen parallel ist, und daß beide zusammengesezte Kräfte einander das Gleichgewicht halten sollen,

sollen, welches nicht anders geschehen kann, als wenn sie in derselbigen geraden Linie gegen einander wirken.

§. 43.

In einer solchen Seilmaschine, wie jezt angenommen worden, verhält sich die Summe der parallelen Kräfte zur Spannung des einen äußersten Fadens, wie der Sinus des Winkels, welchen die Verlängerungen beider äußersten Fäden bilden, sich verhält zum Sinus des Winkels, welchen der andere äußerste Faden mit der Richtung der Kräfte machet. (Siehe die vorige Figur.)

Die Spannungen a, f, und die aus ihnen zusammengesezte Kraft, welche der Summe der Kräfte P, Q, R, S gleich ist, verhalten sich jede wie der Sinus des Winkels, welchen die Richtungen der beiden übrigen bilden. Wenn wir also die aus a und f zusammengesezte Kraft mit Z bezeichnen, so ist

$$Z, a :: \mathfrak{S}AVF, \mathfrak{S}ZVF$$

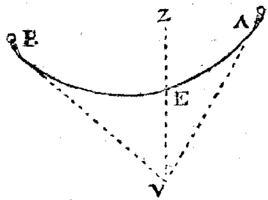
$$Z, f :: \mathfrak{S}AVF, \mathfrak{S}AVZ$$

Da nun $Z = P + Q + R + S$, und da die Winkel AVZ und ZVF diejenigen sind, welche die Richtung der Kräfte mit den äußersten Fäden bildet, so drücken die angeführten Verhältnisse nichts anders aus, als den Lehrsaz, der zu beweisen war.

§. 44.

Die vorhergehenden Lehrsäze sind im strengen Verstande nur alsdann wahr, wenn die Stricke oder Fäden als bloße biegsame Linien betrachtet werden. Lasset uns jezt auch die Schwere eines angehängten Strickes selbst in Betrachtung ziehen.

Man binde die Enden eines vollkommen biegsamen Strickes AEB an zwei festen Punkten A und B, so wird das Strick, vermöge der Schwere seiner Theile, eine gewisse Krümmung annehmen, und man wird folgende Proporzion bekommen: das ganze Gewicht des Strickes verhält sich zur Spannung des einen Endes A, wie der Sinus des Winkels, welchen die Tangenten machen, die das Strick in A und B berühren, zum Sinus des Winkels, welchen die Vertikal-Linie mit der Tangente machet, die das Strick am anderen Ende B berühret.



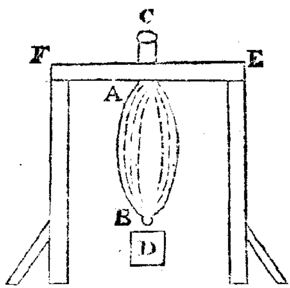
Die Schweren der kleinen Theilchen, woraus das Strick bestehet, können als kleine Kräfte oder Gewichte betrachtet werden, welche an der Seilmaschine angebracht sind, und in vertikalen Richtungen niederwärts ziehen. Die aus denselben zusammengesezte Kraft ist nichts anders als das Gewicht des ganzen Strickes, und wirket in der vertikalen Richtung ZV, welche durch den Punkt V gehet, wo die Tangenten AV und BV zusammentreffen. Diese Tangenten müssen hier als die Verlängerungen der äußersten Theilchen der krummen Linie betrachtet werden. Folglich, wie im vorigen Paragraph gelehret worden, verhält sich das ganze Gewicht des Strickes zur Spannung des Endtheiles A, wie der Sinus des Winkels AVB zum Sinus des Winkels BVZ.

Anmer-

Anmerkung. Die Geometer haben diejenige krumme Linie, welche eine Kette oder ein Strick bildet, welches an beiden Enden aufgehänget ist, so daß die Aufhänge-Punkte nicht in einer Vertikal-Linie liegen, die Ketten-linie (Catenaria, chainette) genannt. Es ist noch nicht Zeit, dieselbe näher zu untersuchen. Unterdessen ist das lezt bewiesene Verhältniß zur fernern Untersuchung derselben sehr wichtig.

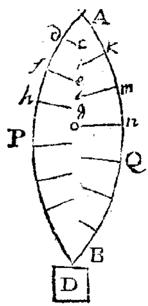
§. 45.

Von einigen neueren Mechanikern wird die Blase mit zu den einfachen Maschinen gerechnet, als durch welche, wenn sie aufgeblasen wird, ein ziemliches Gewicht gehoben werden kann, indem ein Mensch, der nur eine mittelmäßige Stärke der Lungen hat, bis 60 Pfund damit heben kann; stärkere Personen können wohl 120 bis 130 Pfund damit heben. Zu diesem Ende wird die Blase AB an



eine Röhre AC gebunden, durch welche die Luft hineingetrieben werden kann. Am unteren Ende B, welches verschlossen ist, wird ein Gewicht D angehänget. Die Röhre AC gehet durch einen Querbalken EF, woran sie zugleich befestiget ist. Bläset man nun in das Ende C der Röhre, so so treibet die Luft die Blase auseinander, und machet sie dicker, aber kürzer, wodurch das Gewicht D nothwendig etwas gehoben wird.

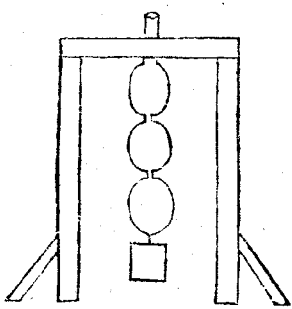
Um die Wirkung dieser Maschine zu erklären, stelle man sich zwei Fäden APB und AQB vor, welche in A und B mit einander verbunden und bei A angehänget sind. Ferner



bilde man sich ein, daß jeder dieser Fäden von innen nach außen durch unendlich viel kleine Kräfte in den Richtungen *cd, ef, gh, &c. ik, lm, on, &c.* getrieben wird, so daß diese Richtungen allemal gegen den Faden senkrecht sind; mithin wird nothwendiger Weise jeder Faden eine Krümmung bekommen, beide Fäden werden auseinander getrieben werden, und das am Ende B hängende Gewicht D wird sich etwas heben. Diese beiden Fäden stellen nun jeden Durchschnitt der Blase vor, und die Kräftchen, welche die Fäden auseinander treiben, sind bei der Blase nichts anders als die Lufttheilchen, welche, nachdem sie hineingeblasen worden, die innere Fläche der Blase drücken und auseinander treiben, als wollten sie einen Ausweg suchen. Da nun unendlich viel Durchschnitte in der Blase gemachet werden können, so kann man sich in derselben auch unendlich

lich viel Fäden vorstellen, und da jeder dieser Fäden durch unendlich viel Lufttheilchen gedrücket wird, so ist nicht zu bewundern, daß die Wirkung dieser Maschine so kräftig ist, obgleich jedes Lufttheilchen nur einen sehr kleinen Druck ausübet.

Will man die Wirkung noch verstärken, so kann man mehrere Blasen durch Röhren mit einander verbinden, wie in folgender Figur. Die Luft gehet alsdann aus



einer Blase in die andere, und dehnet sie alle aus, so daß das Gewicht weit mehr in die Höhe gebracht wird als durch eine einzige Blase.

Anstatt mit dem Munde zu blasen, könnte man zu mehrerer Bequemlichkeit einen Blasebalg gebrauchen. Nur müßte er mit einem Ventil versehen sein, das ist, mit einer Klappe am Ende seiner Röhre, wodurch die Luft verhindert würde, aus den Blasen wieder zurückzutreten. Auch könnte dieses Ventil in derjenigen Röhre angebracht werden, wodurch die Luft in die Blasen hineingehet.

Anmerkung. Diese Blasenmaschine hat in der praktischen Mechanik keinen sonderlichen Nutzen, weil sie die

 Last

Last zu keiner beträchtlichen Höhe hinaufziehen kann. Indessen dienet sie, um zu erklären, wie die Muskeln im menschlichen Körper wirken. Diese Muskeln sind, so zu sagen, Bündel von Fäden, die sich an beiden Enden vereinigen, und eine Art von Blase bilden. Wird nun diese Blase vermittelst des Nervensafts oder durch eine andere Kraft auseinander getrieben, so verkürzet sie sich, und ziehet die folgenden Muskeln oder die Knochen, woran sie gebunden ist; woraus die Bewegungen des menschlichen Körpers entstehen.

Auch kann bei dieser Gelegenheit erkläret werden, wie sich die Stricke verkürzen, wenn sie naß werden. Nämlich, die wässerigen Theile dringen zwischen den Fäden ein, woraus das Strick bestehet, treiben dieselben auseinander, und machen das Strick dicker, aber kürzer. Durch dieses Mittel kann man, sowohl als durch eine Blase, eine Last etwas heben, die an einem Stricke hänget. Man darf nur das Strick mit Wasser begießen oder besprengen, so wird es sich etwas verkürzen und die Last in die Höhe ziehen.

Uebrigens können wir uns hier in keine Rechnung der Blasenmaschine einlassen, als wozu höhere Grundlehren erforderlich sind, als diejenigen, welche wir bis jezt vorgetragen haben.

Siebentes Hauptstück.

Allgemeine Betrachtungen über die Maschinen.

§. 1.

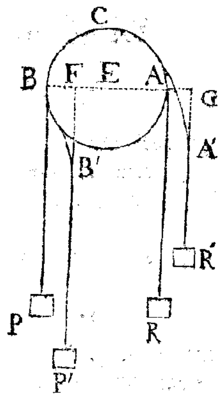
Wir haben im vorigen Hauptstücke sowohl die einfachen Maschinen erkläret, als auch einige Zusammensezungen derselben angezeiget. Jezt wollen wir einige allgemeine Betrachtungen anstellen, welche sich auf alle theils einfache, theils zusammengesezte Maschinen beziehen.

§. 2.

Zuerst bemerken wir, daß die angegebenen Verhältnisse zwischen Kraft und Resistenz nur lediglich und allein für den Fall des Gleichgewichts eingerichtet sind, so daß weder die Resistenz von der Kraft, noch die Kraft von der Resistenz überwogen und in Bewegung gebracht werden könne. Wenn also eine wirkliche Bewegung hervorgebracht werden soll, so muß die Kraft etwas größer angenommen werden, als sie für das Gleichgewicht berechnet worden. Und wenn man die Maschinen bloß geometrisch, und ohne alles Hinderniß betrachtet, so muß die geringste Vermehrung der berechneten Kraft eine Bewegung verursachen. Hingegen in dem wirklichen Zustande der Maschinen wird dieses selten eintreffen, weil verschiedene Hindernisse dabei vorfallen, unter welchen die Steifigkeit der Stricke und die Reibung verschiedener Theile der Maschine gegen einander die merklichsten sind.

§. 3.

Was die Steifigkeit der Stricke betrifft, so kann man auf folgende Weise begreifen, wie dieselbe die Wirkung der Kraft vermindert. Es sei BCA eine Rolle, welche sich ganz frei um ihre Axe E herumdrehen kann.



Ueber diese Rolle gehe das Strick PBCAR, dessen Enden die gleichen Gewichte P und R tragen. Wäre nun das Strick vollkommen biegsam und ohne Schwere, so müßte das eine Gewicht P, so wenig man es auch vermehrte. herunter gehen, und das andere Gewicht R müßte steigen. Das Moment des Gewichtes P, nämlich $P \times BE$, würde dann größer sein als das Moment des Gewichtes R, nämlich $R \times EA$, indem beide Momente in Betrachtung des Ruhepunktes genommen werden. Wenn aber das Strick nicht vollkommen biegsam ist, so wird es bei der Bewegung eine Krümmung annehmen, so daß es zum Exempel in die Lage P′B′ BC A′R′ komme. Alsdann ist der Ruhepunkt E von der Richtung P′F des Gewichtes P′ oder

P

P weniger entfernt als von der Richtung R′G des anderen Gewichtes R′ oder R. Folglich wird das Moment des Gewichtes P, wenn beide Gewichte gleich angenommen werden, kleiner als das Moment des Gewichtes R. Und wenn auch das Gewicht P um etwas vergrößert wird, so wird dennoch diese Zunahme nicht allemal den Abgang am Momente hinlänglich ersetzen. Folglich wird die Bewegung entweder aufhören oder doch langsamer vor sich gehen, als wenn das Strick vollkommen biegsam wäre.

§. 4.

Die Erfahrung lehret, daß ein Strick, welches man biegen will, desto mehr widerstehet, 1) je größer die Kraft oder das Gewicht ist, wodurch es gespannet wird, 2) je dicker das Strick selbst ist, 3) je kleiner die Welle ist, um welche sich das Strick windet. Das Gesetz, nach welchem diese drei Umstände die Resistenz vermehren, läßt sich nicht ganz genau angeben. Gemeiniglich wird angenommen, daß sich die Steifigkeiten der Stricke verhalten, gerade wie die Halbmesser der Stricke, und wie die spannenden Gewichte, zugleich aber umgekehrt wie die Halbmesser der Wellen, um welche sie sich herumwinden; oder, welches einerlei ist, daß die Steifigkeiten der Stricke sich verhalten wie die Zahlen, welche herauskommen, wenn man den Halbmesser jedes Stricks mit dem spannenden Gewichte multipliziret und das Produkt durch den Halbmesser der Welle dividiret. Es seien demnach F und F′ die Steifigkeiten zweier Stricke, r und r' deren Halbmesser, P und P′ die Gewichte, welche daran hängen, R und R′ die Halbmesser der Wellen, so hat man, vermöge der angenommenen Voraussetzung, folgende Proporzion:

$$F, F' :: \frac{Pr}{R}, \frac{P'r'}{R'}$$

Man merke hierbei, daß zum Halbmesser der Welle jedesmal der Halbmesser des Strickes noch mitgerechnet werden muß, weil die Wirkung der Stricke eigentlich in der Richtung ihrer Axe geschiehet. Folglich muß in voriger Proporzion unter R oder R' der Halbmesser der Welle nebst den Halbmesser des Strickes verstanden werden. Man hat gefunden, daß ein Strick, welches 9 Linien im Durchmesser hatte, und an welchem ein Gewicht von 208 Pfund hing, indem es sich um eine Rolle von 11 Zoll und $3\frac{1}{2}$ Linien im Durchmesser bog, eine Steifigkeit äußerte, die an Gewicht 4 Pfund betrug. Das heißt, anstatt eines unendlich kleinen Gewichtes, welches das Gleichgewicht hätte heben und eine Bewegung verursachen sollen, mußten 4 Pfund aufgeladen werden. Nimmt man nun diese Erfahrung als richtig an, so kann, vermittelst der gegebenen Proporzion, die Steifigkeit des Strickes in jedem anderen Falle bestimmet werden. Die 11 Zoll $3\frac{1}{2}$ Linien geben $135\frac{1}{2}$ Linien. Dazu rechne man 9 Linien, als den doppelten Halbmesser des Strickes, so bekömmt man $144\frac{1}{2}$ Linien für den Durchmesser der Rolle, die halbe Dicke des Stricks beiderseits zugerechnet. Da man nun das Verhältniß der Durchmesser anstatt des Verhältnisses der Halbmesser gebrauchen kann, so wird $P = 208$, $2r = 9$, $2R = 144\frac{1}{2}$, $F = 4$ Pfund. Folglich

$$4,\ F' :: \frac{208 \times 9}{144\frac{1}{2}},\ \frac{P'r'}{R'}$$

oder $$\frac{208 \times 9}{144\frac{1}{2}},\ 4 :: \frac{P'r'}{R'},\ F'$$

oder beinahe $$13,\ 4 :: \frac{P'r'}{R'},\ F'$$

Es sei nun ein Strick von 6 Linien im Durchmesser, das sich um eine Welle von 6 Zoll im Durchmesser herum win-

windet, und woran ein Gewicht von 300 Pfund hänget, so ist $P' = 300$, $2r = 6$ Linien, $2R' = 6$ Zoll $+ 6$ Linien $= 78$ Linien, folglich

$$13, 4 :: \frac{300.6}{78}, F'$$

$$13, 4 :: 23, F'$$

daher $F' = \frac{4.23}{13} = 7$ Pfund ohngefähr.

Obgleich man dieser Rechnung keine vollkommene Genauigkeit zuschreiben kann, so ist sie doch als Näherung nicht zu verwerfen. Man merke noch dabei, daß alte Stricke biegsamer sind als neue.

§. 5.

Eines von den größten Hindernissen der Bewegung ist die Reibung der verschiedenen Theile einer Maschine gegen einander. Worin dieselbe bestehet, ist schon im ersten Hauptstücke erkläret worden. Nämlich, da die Flächen der Körper nie vollkommen eben sind, so fügen sich die Erhöhungen der einen Fläche in die Vertiefungen der anderen, oder die Erhöhungen der einen stoßen gegen die Erhöhungen der anderen. In einigen Fällen bedienet man sich der Reibung mit Vortheil. Sie ist es, die da machet, daß ein Mensch auf dem Abhange eines Hügels, oder überhaupt auf einer schiefen Fläche gehen kann, ohne herunter zu gleiten. Sie hält die Nägel im Holze oder in der Wand fest. Sie machet, daß der Handgriff einer Schraube durch den Widerstand nicht so leicht zurückgedrehet werden kann.

Wenn man nöthig hat, die Reibung zu vermehren, so muß man die aneinander stoßende Flächen, so viel als thunlich ist, vergrößern, und dieselben höckericht und uneben machen.

machen. Will man hingegen die Reibung vermindern, so machet man die aneinander stoßenden Flächen so klein und so glatt, als thunlich ist. Man kann auch zwischen den Flächen, die auf einander gleiten sollen, Walzen legen, wodurch weit weniger Berührungs-Punkte statt finden. Auch pfleget man die Flächen mit irgend einer Fettigkeit zu schmieren, welche theils die kleine Vertiefungen ausfüllet, theils auch wie eine unendliche Menge Kügelchen wirket, worauf die eine Fläche rollet. (Neben bei gewinnet man dadurch den Vortheil, daß die Erhitzung und Entzündung der Maschine verhütet wird). Ueberhaupt müssen die jedesmaligen Umstände die bequemsten Mittel bestimmen, wodurch die Reibung vermindert werden kann.

Die Reibung ist am geringsten, wenn die reibenden Flächen sich nur in einem Punkte oder in sehr wenigen Punkten berühren, wie zum Exempel, wenn eine Kugel oder ein Zylinder auf eine Ebene rollet. Hierzu kömmt noch in diesem Falle, daß bei rollenden Körpern die Erhöhungen der Flächen wie die Zähne der Räder in einander greifen, und sich ohne viel Gewalt wieder auseinander fügen.

Viel stärker ist die Reibung, wenn eine Fläche auf der anderen gleitet, als z. E. wenn man einen Kasten auf der Erde oder auf den Dielen fortschiebet.

Manchmal vereiniget sich die rollende Reibung mit der gleitenden, als zum Beispiel, wenn eine Kugel auf einer Fläche fortgeschoben wird und sich nicht geschwinde genug herumdrehet, um daß jeder Punkt der Kugel allmälig nur einen Punkt der Fläche berühre.

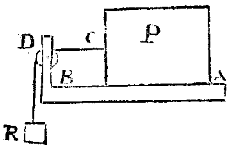
Es ist unmöglich, die Quantität der Reibung im jedem Falle bloß theoretisch zu bestimmen, weil die Beschaffenheit

der

der Höckerichkeiten bei verschiedenen Materien gar sehr unbestimmt und dem Menschen unbekannt ist. Jedoch kann man Versuche anstellen, und hat auch dergleichen angestellt, um die Sache etwas ins Licht zu setzen.

§. 6.

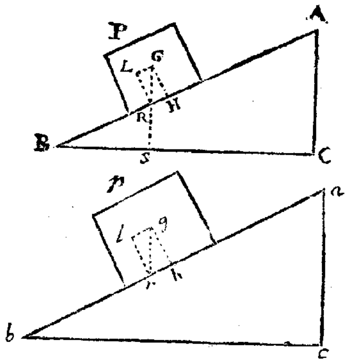
Wenn man dergleichen Versuche machen will, so kann es auf verschiedene Art geschehen.



Man stelle zum Exempel einen Körper P, der unterwärts eine gerade Fläche hat, auf eine horizontale Ebene AB. Man binde einen Faden CDR daran, der über eine Rolle D gehet, und hänge an dem Faden in R allmälig ein größeres Gewicht, bis der Körper P anfängt sich zu bewegen, so bestimmet dieses Gewicht den Widerstand, der aus der Reibung entstehet. Denn, wenn keine Reibung vorhanden wäre, so müßte das geringste Gewicht den Körper P schon in Bewegung setzen, weil die Wirkung seiner Schwere durch die Ebene AB gänzlich vernichtet wird. Machet man nun den nämlichen Versuch mit verschiedenen, größeren oder kleineren, schwereren oder leichteren, mehr oder weniger glatten Körpern, so kann man einige allgemeine Bemerkungen und Regeln in Betrachtung der Reibung finden. Man sorge aber dafür, daß der Faden so biegsam als möglich, und die Rolle sehr beweglich sei. Denn sonst würden die Unbiegsamkeit des Fadens und die Reibung der Rolle bei der Größe des Gewichtes R mit in Anschlag kommen müssen.

§. 7.

Auch läßt sich die schiefe Ebene sehr bequem gebrauchen, um die Reibungen verschiedener Korper zu vergleichen. Nämlich, man stellet den Körper auf eine horizontale Ebene, und hebet hernach allmählig das eine Ende der Ebene, so, daß sie gegen die Horizontalfläche immer schiefer und schiefer werde, bis man merket, daß der Körper anfängt zu gleiten.



Gesezt der Körper P sei in Begriff sich zu bewegen, wenn die schiefe Ebene AB die Neigung ABC bekommen hat. Es sei G der Schwerpunkt des Körpers. Die lothrechte Linie GR mag die Kraft der Schwere vorstellen, welche den Körper zur Erde hintreibet. Diese Kraft läßt sich in zwei andere auflösen. Die eine ist die Kraft GH, welche auf AB senkrecht ist, und durch den Widerstand der Ebene AB vernichtet wird. Sie stellet also zugleich den Druck vor, welchen die Ebene leidet. Die andere ist die Kraft GL, welche mit der Ebene AB parallel ist, und den Körper reizet, längs dieser Ebene herunter zu gleiten. Diese Kraft GL ist es, welche in der Reibung einen Widerderstand findet, und die Reibung muß derselben gleich geachtet werden, wenn der Körper in Begriff ist zu gleiten.

Die Auflösung der Kraft GR geschiehet bekanntermaßen durch die Zeichnung des Parallelogramms HL, worin GH und LR auf AB senkrecht sind, hingegen GL mit derselben parallel ist. Verlängere die lothrechte Linie GR bis in S, so ist $\triangle GLR \backsim \triangle RHG \backsim \triangle RSB \backsim \triangle ACB$. Also ist das Dreieck GLR dem Dreieck ACB ähnlich. Daher bekömmt man folgende zwei Proporzionen

$$GL, GR :: AC, AB$$

$$GL, LR \ (= GH) :: AC, BC$$

Die erste dieser Proporzionen giebt

$$GL = \frac{GR \times AC}{AB}$$

die andere $$GL = \frac{GH \times AC}{BC}$$

Daraus folget 1) daß der Widerstand die Reibung erhalten wird, wenn man das Gewicht des Körpers mit der Höhe der Ebene multiplizirét und das Produkt durch die Länge derselben theilet, und 2) daß man den nämlichen Widerstand erhält, wenn man den senkrechten Druck auf die Ebene mit der Höhe derselben multipliziret und durch die Grundlinie dividiret.

Es sei jezt ein anderer Körper p, auf einer schiefen Ebene ab, wo er schon im Begriff ist herunter zu gleiten. Uebrigens werde alles wie vorher konstruiret, so bekömmt man gleichfalls

$$gl = \frac{gr \times ac}{ab}$$

und

$$\text{und} \quad gl = \frac{gh \times ac}{bc}$$

$$\text{Folglich ist} \quad GL, gl :: \frac{GR \times AC}{AB}, \frac{gr \times ac}{ab}$$

$$\text{und} \quad GL, gl :: \frac{GH \times AC}{BC}, \frac{gh \times ac}{bc}$$

Nun bedeuten GL und gl solche Kräfte, die den Reibungen gleich sind, wenn nämlich die Ebenen hinlänglich geneigt sind, um daß die Körper in Begriff seien herunter zu gleiten. Wenn man also die Gewichte beider Körper, nebst den Ausmessungen der Dreiecke ACB und acb kennet, so lässet sich das Verhältniß der Reibung aus der ersten Proporzion finden.

In der zweiten Proporzion kömmt die Größe GH vor, welche den Druck des Körpers P gegen die Fläche AB vorstellet. Diese Größe wird leicht gefunden, so bald man die Neigung der schiefen Ebne, wie auch das Gewicht des Körpers kennt. Denn die ähnlichen Dreiecke GRH und BAC geben.

$$AB, BC :: GR, GH$$

das heißt: wie sich die Länge der Ebne zu ihrer Grundlinie verhält, so verhält sich das ganze Gewicht des Körpers zu seinem Druck gegen die schiefe Ebene. Wenn nun die drei ersten Säße dieser Proporzionen bekannt sind, so ist der vierte leicht zu finden.

Man hat noch mancherlei andere Maschinen erdacht, um die Reibungen verschiedener Körper und Flächen durch Versuche zu vergleichen. Aber da solche Versuche mehr zur Naturlehre als zur Mathematik gehören, so ist es hier nicht der Ort sich dabei aufzuhalten.

§. 8.

§. 8.

Obgleich man keine völlig bestimmte Regeln für die Reibung geben kann, so hat doch die Erfahrung folgende Bemerkungen bestätiget:

1) die Reibung der gleitenden Körper ist weit stärker, als die Reibung der rollenden Körper, wie schon vorher gesaget worden.

2) Höckerichte Flächen geben ebenfalls mehr Reibung als glatte, wie auch schon oben erinnert worden.

3) Wenn man Körper von einerlei Materie mit einander vergleichet, so verhalten sich die Quantitäten der Reibung, so daß die Größen der reibenden Flächen nicht viel in Betrachtung kommen. Wenn man folglich einen Körper, der verschiedene größere und kleinere Flächen hat, nach und nach auf verschiedenen Grundflächen aufstellet so daß er jedesmal auf einem horizontalen Brette ruhe, und den Versuch mit einem Gewichte anstellet, (§ 6.) so wird man die Quantität der Reibung, ungeachtet der größeren oder kleineren Fläche fast allemal gleich finden. Jedoch ist nicht zu leugnen, daß die Größe der reibenden Fläche auch etwas zur Quantität der Reibung beiträgt, jedoch nicht so viel als man denken möchte, wenigstens bei weitem nicht so viel als das Gewicht oder der Druck des reibenden Körpers.

4) Wenn ein schwerer Körper lange auf einer Ebne ruhet, so drückt er sich desto mehr in die Poren hinein, welches die Reibung vermehret.

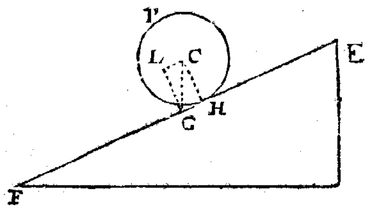
5) Die geschwindere oder langsamere Bewegung eines Körpers, der auf einer reibenden Ebne gleitet, scheinet

net auf die Quantität der Reibung keinen großen Einfluß zu haben. Zwar ist bei einer geschwinderen Bewegung der Stoß der Höcker gegen einander stärker. Hingegen haben die Höcker dabei nicht Zeit, so tief in die Poren der Ebene einzudringen.

§. 9.

Die Reibung verursachet verschiedene Wirkungen und Erscheinungen, wovon wir hier nur eine anführen wollen.

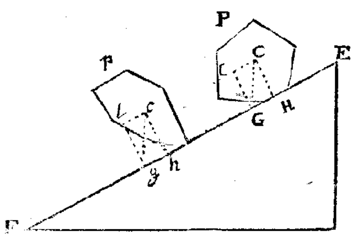
Man pfleget gemeiniglich anzunehmen, daß ein Körper längs einer schiefen Ebne herunter rollen muß, so bald die vertikale Linie, die durch seinen Schwerpunkt gehet, die schiefe Ebene außerhalb der Grundfläche des Körpers trifft. Diese rollende Bewegung wird aber oft von der Reibung allein verursachet.



Es werde eine Kugel P auf eine schiefe Ebene EF geleget, so ist klar genug, daß die Vertikal-Linie CG außerhalb des berührenden Punktes H fällt, welchen man als die Basis des Körpers betrachten muß. Dennoch würde die Kugel nicht rollen, sondern bloß gleiten, wenn keine Reibung vorhanden wäre. Es mag die Linie CG die Kraft der Schwere vorstellen. Diese läßt sich nun in zwei Kräfte auflösen, wovon die eine CH gegen die schiefe Ebene senkrecht ist, und durch den Berührungspunkt H gehet.

gehet. Dieser Theil der Kraft wird durch den Widerstand der Ebene vernichtet; folglich bleibet nur noch der andere Theil CL. Da nun dieser durch den Schwerpunkt gehet, und von der Ebene EF, mit welcher er parallel ist, nicht gehindert wird, so hat er sonst keine Wirkung, als den Körper P in der Richtung CL längs der schiefen Ebene fortzutreiben. Also wird der Körper P bloß gleiten, aber nicht eine rollende oder drehende Bewegung bekommen. Ist aber eine Reibung vorhanden, so gehet der Schwerpunkt C zwar seinen Weg in der Richtung CL. Unterdessen aber werden die berührenden Theile wie H durch die Höcker der Ebne EF zurückgehalten, wodurch die rollende Bewegung entstehet, indem der Schwerpunkt geschwinder gehet als die berührenden Punkte.

Um überhaupt zu erforschen, ob ein Körper auf einer schiefen Ebne, wenn man die Reibung aus der Acht läßt, bloß gleiten oder sich zugleich wälzen muß, fälle man aus dem Schwerpunkte desselben eine gerade Linie senkrecht gegen die schiefe Ebne. Fällt diese Linie außerhalb der Fläche, welche auf der Ebne anlieget, so muß der Körper rollen oder sich wälzen; fällt aber gedachte Linie innerhalb der gedachten Fläche, so wird er bloß gleiten.



Zum Exempel. Der Körper P auf der schiefen Fläche EF wird bloß gleiten. Denn man zerlege, wie vorher bei

bei der Kugel, seine Schwere CG in die beiden Kräfte CL und CH, deren erste mit EF parallel, die andern aber auf EF senkrecht ist, so findet die Kraft CH in der Ebne EF einen Widerstand der sie vernichtet, und es bleibt bloß die Kraft CL, die den Körper P ohne Umdrehung längs der Ebne EF forttreibet. Wälzet er sich um, so entstehet dieses bloß, wie bei der Kugel, von der Reibung. Hingegen der Körper *p*, würde sich auch ohne Reibung umwälzen. Denn, wenn man seine durch *cg* vorgestellte Schwere in zwei Kräfte *cl* und *ch* zerleget, so fällt *ch* vermöge der Gestalt des Körpers ausserhalb der berührenden Fläche. Die Kraft *ch* findet demnach keinen ihr gerade entgegengesetzten Widerstand. Folglich ist ihre Wirkung nicht ganz vernichtet, und sie treibet den Schwerpunkt *c* näher zur Ebne EF, welches nicht ohne Umwälzung des Körpers geschehen kann.

§. 10.

Da die Reibung allemal einen merklichen Widerstand verursachet, so wohl als die Steifigkeit der Stricke, so können, wie schon erinnert worden, die im vorigen Hauptstücke angegebenen Verhältnisse zwischen Kraft und Resistenz nicht als vollkommen genau angesehen werden, hauptsächlich wenn eine Maschine in Bewegung ist. Im Falle des bloßen Gleichgewichts widerstehet die Reibung meistens sowohl der Kraft als auch der Resistenz, und störet also nicht das Gleichgewicht. Hingegen wenn die Kraft eine Maschine beweget, so hat sie einen doppelten Widerstand zu überwinden, nämlich die Last, welche sie bewegen soll, und die Reibung der Theile der Maschine, welche an einander stoßen. Hierzu kömmt noch, daß eine Vermehrung der Kraft nöthig ist, um das Gleichgewicht zu heben, und eine wirkliche Bewegung hervor zu bringen. Aus diesen Gründen muß die berechnete Kraft allemal etwas größer ange-

angenommen werden. Man wird ziemlich sicher verfahren, wenn man sie um ihren dritten Theil vergrössert, welches in den allermeisten Fällen hinreichend sein wird, so wohl um das Gleichgewicht zu heben, als auch die Reibung und die Steifigkeit der Stricke zu überwinden. Gesezt also, man hätte durch die Rechnung gefunden, daß man, vermöge einer gewissen Maschine, eine gegebene Last mit dreißig Pfund Kraft in Gleichgewicht halten kann, so gebrauche man, zur Bewegung, eine Kraft von vierzig Pfund.

§. 11.

Im vorigen Hauptstücke haben wir den Gebrauch solcher Maschinen erkläret, die theils einfach, theils wenig zusammengesezt sind. Wir wollen jezt einige allgemeine Vorschriften geben, wornach man sich richten könne, wenn man eine Maschine überhaupt anordnen will. Vor allen Dingen muß man den Zweck überlegen, wozu die Maschine gebrauchet werden soll. Denn, bald kömmt es darauf an, etwas in die Höhe zu ziehen oder treiben, wie zum Exempel eine Glocke, oder einen Lastwagen; bald soll etwas in einer horizontalen Richtung gezogen oder getrieben werden; bald soll bloß eine einförmige Bewegung verursachet werden, wie bei Uhrwerken; bald wird eine geschwinde Bewegung verlanget, wie bei Mühlen; bald soll etwas gedrücket oder gepresset werden. Es ist leicht einzusehen, daß jede dieser verlangten Wirkungen vortheilhafter durch eine Maschine als durch eine andere erlanget werden kann. Zum Exempel, Flaschenzüge lassen sich am bequemsten gebrauchen, um etwas in die Höhe zu ziehen, Hebel und Wagenwinden um etwas aufwärts zu treiben, Schrauben zum Drücken und Pressen, Räderwerke zu schnellen oder einförmigen Bewegungen. Auch muß die Gelegenheit des Orts in Betrachtung kommen, indem man nicht allemal Platz hat, große Gerüste anzubringen, und dann diejenigen Maschinen vorziehen muß, welche am wenigsten Platz einnehmen.

§. 12.

Auch muß man betrachten, was jede anzuwendende Kraft leisten kann. Oft ist es die Kraft eines Menschen. Dieser hat den Vorzug, daß er mit Händen und Füßen in allerlei Richtungen wirken kann, indem er niederdrücket, in die Höhe ziehet, vor sich fort stösset, nach sich ziehet, herumdrehet. Die Thiere haben meistens mehr Stärke als der Mensch, hingegen weniger Geschicklichkeit, jedoch kann man sie zum Ziehen, und zum Niedertreten gebrauchen, wie auch bei einer vertikalen Winde, um dieselbe vermittelst einer langen Stange herum zu drehen. Luft und Wasser werden als bewegende Kräfte mit großem Nutzen angewandt, hauptsächlich, um einem Rade oder einer Welle eine drehende Bewegung zu geben. Oft ist die bewegende Kraft ein bloßes Gewicht, welches meistens an einem Stricke hänget, wie bei Wanduhren. In anderen Fällen, wie z. E. bei Taschenuhren, gebrauchet man eine Feder, welche sich allmälig entwikkelt, und dadurch eine Trommel herumtreibet.

Es wäre für unserem Zweck zu weitläuftig, die Wirkungen dieser verschiedenen Kräfte genauer zu untersuchen. Da Menschen und Thiere am häufigsten gebrauchet werden, um Maschinen zu bewegen, so wollen wir nur dieses bemerken, daß der Mensch in einigen Fällen, zum Exempel bei dem Druckhebel, mit dem ganzen Gewichte seines Körpers wirken kann, indem er sich ganz darauf leget. Sonst wird bei dem Drehen, Ziehen und Stoßen die Kraft eines Menschen nur zu 25 Pfund gerechnet, hauptsächlich wenn er einige Stunden nach einander arbeiten soll. Die Kraft eines Pferdes wird 7mal größer als die Kraft eines Menschen gerechnet, also 175 Pfund bei einer anhalten-

den

den Arbeit. Auch hat man bemerket, daß sowohl ein Mensch als auch ein Pferd bei einer anhaltenden Arbeit in einer Stunde nicht mehr als 12000 Fuß durchlaufen kann. Den nämlichen Raum kann der Mensch in einer Stunde bei einer drehenden Bewegung mit der Hand durchlaufen. Diese Beobachtung des durchlaufenen Raums ist deswegen nöthig, weil es oft auf die größere oder kleinere Geschwindigkeit ankömmt.

Ferner ist bei Anwendung der Kraft zu beobachten, daß man sie, so viel als möglich ist, in der vortheilhaftesten Richtung und Stellung anbringe. Zum Exempel unbequeme Stellungen eines Menschen oder eines Thieres machen ihm die Arbeit sauer und verursachen eine baldige Ermüdung.

§. 13.

Wenn man nun überleget hat, was von jeder Art Kraft zu erwarten ist, so muß man ferner bedenken, welche von allen sich im gegebenen Falle am besten anwenden läßt, und welche man sich am leichtesten verschaffen kann. Wenn dieses gethan, so betrachte man, wie groß die Resistenz ist, die man zu überwinden hat, und wie weit sich die Stärke der bewegenden Macht erstrecket, die man zu seinem Dienste hat. Man vergleiche die Resistenz mit der Kraft, um zu erfahren, wie vielmal die Kraft von der Resistenz übertroffen wird. Daraus wird sich schließen lassen, ob eine einfache Maschine hinlänglich ist, oder ob man eine zusammengesezte braucht. Im lezteren Falle muß man noch überlegen, welche einfache Maschinen sich am bequemsten unmittelbar verbinden lassen. So wird man z. E. bemerken, daß die Wirkung einer Welle, um welche sich ein Strick herumwindet, am bequemsten verstärket wird, wenn man das mit der Welle verbundene Rad durch eine unendliche Schraube herumdrehet. Oder das Rad wird durch einen Trieb beweget, an dessen Welle wiederum ein Rad befestiget ist, welches durch einen anderen Trieb gedrehet wird, u. s. w. Dieses giebt ein Räderwerk, wie es im vorigen Hauptstücke beschrieben worden. Und auf eine solche Art setzet man die Untersuchung fort, bis man findet, daß die Kraft so viel wirken kann, als im gegebenen Falle nöthig ist.

§. 14.

Wenn man die Kraft und die Resistenz in einer Maschine nach dem Gewichte schätzet, so findet sich, vermöge der Beweise des vorigen Paragraphs, daß der Nutzen der Maschinen darin bestehet, daß durch dieselben ein grösseres Gewicht von einem kleineren im Gleichgewicht gehalten werden kann, und in diesem Verstande pfleget man der Kürze halben zu sagen, die Maschine vermehre die Kraft so und so viel mal. Zum Exempel, der Hebel vermehret die Kraft so viel mal als die Entfernung der Resistenz vom Ruhepunkte in der Entfernung der Kraft von selbigen Punkte enthalten ist. Ein Flaschenzug vermehrt die Kraft so viel mal als parallele Theile des Strickes vorhanden sind, die von der untern Flasche aufwärts gehen. Die Winde vermehret die Kraft so oft als der Halbmesser des Zylinders im Halbmesser des von der Kraft beschriebenen Zirkels enthalten ist. Der Keil, so vielmal als die obere Breite desselben in der Summe der Längen beider Seiten enthalten ist. Die Schraube, so vielmal als eine Stufe derselben in der Peripherie des von der Kraft beschriebenen Zirkels enthalten ist.

Bei allen diesen Verhältnissen muß man sich aber wohl erinnern, daß man unter der Kraft weiter nichts verstehet, als ein Gewicht, das eben so stark ziehet als die Kraft. Der Begriff der Geschwindigkeit, welcher sonst mit der Kraft verbunden zu sein pfleget, wird hier gänzlich aus der Acht gelassen.

§. 15.

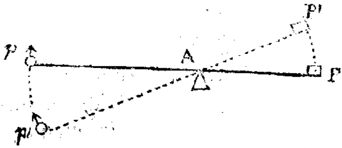
Betrachtet man die Maschinen nicht bloß im Zustande des Gleichgewichts, sondern im Zustande der Bewegung, so findet sichs, daß man an der Geschwindigkeit oder der Zeit wiederum so viel verlieret, als man am Gewichte, welches die Kraft vorstellet, gewonnen hat. Nämlich, wenn man durch eine Maschine erhalten kann, daß ein gewisses Gewicht, welches als Kraft gebrauchet wird, ein tausendmal grösseres Gewicht in Gleichgewicht halte, so findet sich bei der Bewegung, daß die tausendmal grössere Resistenz auch tausendmal langsamer gehet, als die tausendmal kleinere Kraft. Dieses kann im allgemeinen folgender Weise ausgedrücket werden: wenn eine Maschine in Gleichgewicht ist, so verhalten sich Kraft und Resistenz (beide dem Gewichte nach geschätzet) umgekehrt wie die Wege, welche sie zu gleicher Zeit durchlaufen würden, wenn die Bewegung statt fände, oder umgekehrt wie die Geschwindigkeiten, welche sie in diesem Falle bekommen würden. Oder, so vielmal die Resistenz grösser ist, als die Kraft, so vielmal muß sie langsamer gehen. Es sei demnach die Kraft p, und ihre Geschwindigkeit x. Die Resistenz sei P, und ihre Geschwindigkeit X, so muß sein

$$p, P :: X, x$$

oder $$px = PX$$

Man kann folglich auch sagen, daß gleiche Produkte herauskommen müssen, wenn man Kraft und Resistenz jede mit ihrer Geschwindigkeit multipliziret. Dieses werden wir bald umständlicher beweisen. Unterdessen kann man es schon aus den gewöhnlichsten Fällen abstrahiren.

(Siehe die folgende Figur.)



Es sei zum Exempel pP ein Hebel, dessen Ruhepunkt in A ist. Im Falle des Gleichgewichts ist aber

$$p, P :: AP, Ap$$

Gesetzt nun, der Hebel gerathe in Bewegung und drehe sich um seinen Ruhepunkt A herum, so daß er in die Lage $P'p'$ komme, so hat die Kraft den Bogen $p'p$, und die Resistenz zu gleicher Zeit den Bogen $P'P$ beschrieben. Da nun die vertikalen Winkel bei A gleich sind, so sind gedachte Bogen ähnlich oder von gleich viel Graden. Folglich verhalten sich ihre Längen wie ihre Halbmesser, das heißt,

$$P'P, p'p :: AP, Ap$$

Setzet man nun in die erste Proporzion das Verhältniß der Bogen, anstatt des Verhältnisses der Halbmesser,

so ist $$p, P :: P'P, p'p$$

$$\text{oder } p \times p'p = P \times P'P$$

woraus man siehet, daß beim Hebel im Gleichgewicht Kraft und Resistenz sich in der That umgekehrt verhalten, wie ihre Geschwindigkeiten, oder daß die Produkte gleich sind, wenn man jede der beiden Mächte mit ihrer Geschwindigkeit multipliziret.

Wenn man einen Flaschenzug betrachtet, woran das Strick sechs parallele Theile hat, die von dem untersten Kloben aufwärts gehen, so wird die Kraft sechs mal vermehret. Man wird aber leicht einsehen, daß die Kraft dage-

dagegen sechsmal geschwinder gehet, indem sie die ganze Länge des Strickes durchlaufen muß, unterdessen daß die Resistenz nur den sechsten Theil dieser Länge durchläuft.

Bei der Schraube haben wir gesehen, daß die Resistenz die Kraft so vielmal übertrift, als der von der Kraft beschriebene Umkreis die Höhe einer Schraubenstufe übertrift. Hingegen gehet die Resistenz eben so vielmal langsamer. Denn unterdessen daß die Kraft einen ganzen Kreis beschreibet, durchläuft die Resistenz nur die Höhe einer Schraubenstufe.

Eben solche Betrachtungen kann man bei den übrigen Maschinen anstellen, und es wird sich allemal finden, daß obige allgemeine Bemerkung ihre Richtigkeit hat, welches wir bald unwidersprechlich darlegen werden. Hierauf muß also bei der Anordnung einer Maschine ebenfalls Rücksicht genommen werden. Man muß nämlich bedenken, ob man mehr oder weniger Zeit anzuwenden hat. Hat man viel Zeit, so kann man eine Maschine gebrauchen, welche die Kraft sehr vielmal vermehret. Alsdann wird die Last zwar langsam fortrücken, aber die nöthige Kraft um desto kleiner sein. Hingegen wenn die Last sich geschwinde bewegen soll, so muß man eine Maschine gebrauchen, welche die Kraft nicht so sehr vermehret.

§. 16.

Aus der vorhergehenden Bemerkung folget noch diese, daß, obgleich in der abstrakten Theorie alles durch Maschinen ins Werk zu stellen möglich zu sein scheinet, die Ausführung dennoch dieser Möglichkeit nicht allemal entsprechen kann, weil sowohl die Kräfte selbst als auch ihre Geschwindigkeiten in gewissen Gränzen eingeschränket sind. Durch Beispiele wird dieses noch begreiflicher werden.

Es

Es sei gegeben ein Gewicht von 1000000 Pfund, welches bis zu einer Höhe von 100 Fuß gehoben werden soll. Es wird gefraget, wie man dieses ins Werk stellen könne? Es sei 1000000 Pfund $=$ P, und 100 Fuß $=$ X. Gesezt nun ferner, die Arbeit solle in einer Stunde verrichtet werden, so wissen wir schon, daß ein Mensch oder ein Pferd in einer Stunde ohngefähr 12000 Fuß durchlaufen kann. Es sei demnach 12000 Fuß $= x$. Die erforderliche Kraft sei p, so haben wir, vermöge des vorigen Paragraphs, die Gleichung

$$px = \mathrm{PX}$$

oder im gegenwärtigen Falle

$$p.\ 12000 = 1000000.\ 100$$

$$\text{oder } p = \frac{1000000.\ 100}{12000} = 8333\tfrac{1}{3} \text{ Pfund.}$$

Da nun die Kraft eines Menschen 25 Pfund und eines Pferdes 175 Pfund geschätzet wird, so dividire man den gefundenen Werth von p durch 25 oder durch 175. Alsdann findet man, daß entweder 333 Menschen oder 47 Pferde gebrauchet werden müßten, um die Last von 1000000 Pfund in Gleichgewicht zu halten. Sollte nun die Maschine wirklich in Bewegung gesetzet werden, so wären noch mehrere Menschen oder Pferde erforderlich, theils um das Gleichgewicht zu heben, theils um die Reibung, welche gewiß sehr stark sein würde, zu überwinden. Wie viel Schwierigkeit würde es aber nicht verursachen, so viele Menschen oder Pferde auf eine bequeme Art anzubringen, um daß sie einander nicht hinderten! Hierzu kömmt noch, daß man wohl kaum Stricke und Gerüste stark genug machen könnte, um eine so ungeheure Last zu tragen. Obgleich es also in der bloßen Theorie eine Kleinigkeit ist, eine Maschine zu erfinden, vermittelst welcher

1000000

1000000 Pfund in einer Stunde 100 Fuß hoch gehoben werden können, so würde man doch in der Anwendung fast unüberwindliche Schwierigkeiten antreffen.

Gesezt ferner, es werde gefraget, wie viel Zeit entweder 14 Menschen oder 2 Pferde gebrauchen würden, um 1000000 Pfund vermittelst irgend einer Maschine 100 Fuß hoch zu heben? so ist $p = 25 \times 14 = 2 \times 175 = 350$ Pfund, $P = 1000000$, und $X = 100$. Also

$$x . 350 = 1000000 . 100$$

daher $$x = \frac{1000000 . 100}{350} = 285714 \text{ Fuß}.$$

welches, 12000 Fuß für jede Stunde gerechnet, beinahe 24 Stunden giebt. So daß die 14 Menschen oder 2 Pferde 24 Stunden arbeiten müßten.

Gesezt ferner, man verlange zu wissen, bis zu welcher Höhe 14 Menschen oder 2 Pferde ein Gewicht von 1000000 Pfund in einer Stunde heben könnten? so ist $p = 25 \times 14 = 175 \times 2 = 350$, $x = 12000$, $P = 1000000$, und man bekömmt folgende Gleichung.

$$X . 1000000 = 12000 . 350$$

daher $$X = \frac{12000 . 350}{1000000} = 4\tfrac{1}{5} \text{ Fuß},$$

so daß das Gewicht in einer Stunde 4 Fuß und $2\frac{2}{5}$ Zoll steigen würde.

Zulezt werde gefragt, wie groß das Gewicht ist, welches entweder 14 Menschen oder 2 Pferde in einer Stunde 100 Fuß hoch heben können, mit Hülfe irgend einer Maschine? so ist wiederum $p = 350$, $x = 12000$, $X = 100$ und es wird P verlanget

$$P . 100 = 350 . 12000$$

daher $P = \frac{350 . 1200}{100} = 42000$ Pfund,

wobei jedoch die Reibung und die Hebung des Gleichgewichts nicht in Anschlag genommen sind.

Aus allem diesen erhellet hinlänglich, daß die Wirkungen der Maschinen in der Anwendung begränzet sind, und daß man außerdem, wie schon bemerket worden, allemal an Zeit und Geschwindigkeit verlieret, was man an der Kraft ersparet. Ohnerachtet dessen leisten doch die Maschinen in vielen Fällen die größten Dienste, wie man täglich in der Baukunst und in andern menschlichen Gewerben bemerken kann. Nur muß man behutsam sein, und sich nicht vorstellen, daß eine auf dem Papiere gezeichnete und berechnete Maschine in der wirklichen Ausführung allemal dasjenige leisten wird, was man sich davon verspricht. Auch muß sich ein Mechaniker nicht mit leeren Hirngespinsten abgeben, so wie diejenigen gethan haben, welche das Perpetuum Mobile gesuchet haben, das heißt, eine Maschine, die sich in Ewigkeit fort von selbst bewege. Denn, wie auch eine Maschine beschaffen sei, so kann sie nicht anders beweget werden als durch eine Kraft: sollte nun die Bewegung ewig dauern, so müßte die Kraft selbst schon eine ewige Bewegung haben, das heißt, um die ewige Bewegung zu erfinden, müßte man sie vorher schon haben, welches ein Widerspruch ist.

§. 17.

Der Lehrsatz, welchen wir kurz vorher angeführet und durch einige Beispiele erläutert haben (§ 15) hat eine weit größere Ausdehnung, als wir ihm dort gegeben haben. Man stelle sich vor, daß verschiedene Kräfte auf einen Punkt, eine Linie, eine Fläche oder einen Körper wirken und einander das Gleichgewicht halten. Nun gedenke man sich ferner den Fall, daß das ganze System, aus welcher Ursache es auch sei, sich zu bewegen anfange, entweder in gerader Linie, oder um einen festen Punkt herum, so wird nothwendig jede Kraft im Anfange der Bewegung, in ihrer Richtung etwas vorwärts oder rückwärts gehen, das heißt, die Richtungslinie jeder Kraft wird etwas verlängert oder verkürzet werden, die eine mehr, die andere weniger. Jede Kraft wird also in ihrer Richtung, im ersten unendlich kleinen Zeittheilchen, einen unendlich kleinen Weg durchlaufen. Diesen unendlich kleinen Weg wollen wir die **energische Geschwindigkeit** der Kraft nennen. Gehet die Kraft vorwärts in ihre Richtung, so ist diese Geschwindigkeit positiv; ist aber die Kraft gezwungen rückwärts zu gehen, so ist sie negativ.

Multipliziret man eine Kraft mit ihrer energischen Geschwindigkeit, so entstehet ein Produkt, welches wir die **Energie** der Kraft nennen wollen. Diese Energie ist nun wiederum entweder positiv oder negativ, je nachdem die energische Geschwindigkeit positiv oder negativ ist, das heißt, je nachdem die Kraft vorwärts oder rückwärts gehet.

Hierbei ist wohl zu bemerken, daß, bei Vergleichung der Energien die **gleichzeitigen** Räumchen, welche von den Kräften durchlaufen werden, als Geschwindigkeiten angesehen werden müssen.

Alles dieses vorausgesetzet, so kann man folgenden Lehrsatz behaupten:

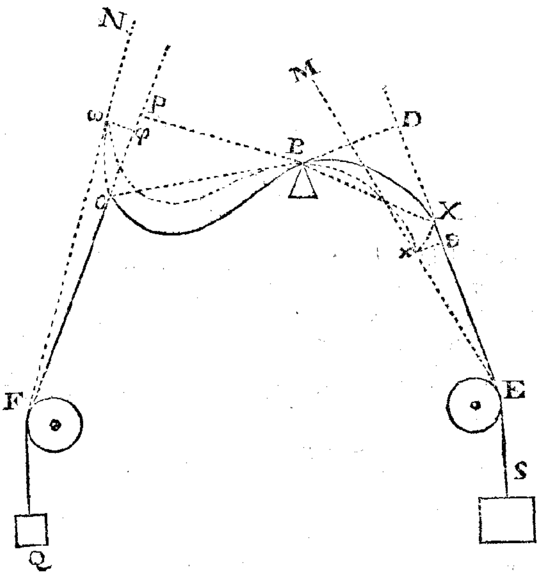
Wenn zwei oder mehrere Kräfte in Gleichgewicht sind, so ist die positive Energie, oder die Summe der positiven Energien eben so groß als die, als positiv betrachtete, negative Energie, oder die als positiv betrachtete Summe der negativen Energien.

Dieser

Dieser fruchtbare Lehrsatz muß auch bei jeder Maschine eintreffen. Wir wollen ihn für jede einfache Maschine insbesondere beweisen, und den Anfang mit dem Hebel machen.

§. 18.

Um den Beweis für den Druckhebel ganz allgemein zu machen, so wollen wir ihn nicht gerade sondern krumm annehmen. Es sei demnach XBO ein beliebiger Hebel, der sich um den Punkt B herum bewegen kann, doch so, daß dieser Punkt selbst fest und unbeweglich sei. Gesezt, daß die beiden Gewichte S und Q, welche vermittelst der Fäden SEX und QFO über Rollen hängen, in Gleichgewicht ge-



halten

halten werden. Aus dem Punkte B fälle man die Linien BD und BP, auf die verlängerten Richtungen der Kräfte oder Gewichte senkrecht. Aus dem nämlichen Punkte B ziehe man bis zu beiden Enden des Hebels die geraden Linien BX und BO, so hat man einen Hebel, der aus zwei geraden Theilen BX und BO bestehet, und mit dem gegebenen krummen einerlei Wirkung thut.

Nun stelle man sich vor, der Hebel bekomme durch eine fremde Kraft eine unendlich kleine Bewegung um den Ruhepunkt B herum, so daß er in die neue Lage $xB\omega$ komme. In diesem Falle beschreibet der Punkt X einen kleinen Zirkelbogen Xx, welcher die gerade Linie BX zum Halbmesser hat. Ebenfalls beschreibet der Punkt O einen kleinen Zirkelbogen $O\omega$, welcher die gerade Linie BO zum Halbmesser hat. Die Richtungslinie DE bekömmt die Lage ME, und die Richtungslinie PF bekömmt die Lage NF. Weil nun vorausgesetzet wird, daß die Bewegung unendlich klein ist, so wird der Winkel, welchen jede neue Richtungslinie mit der alten bei E und F machet, unendlich klein sein, so daß EM mit ED und FN mit FP für parallel geachtet werden können. Aus dem nämlichen Grunde können die kleinen Zirkelbögen Xx und $O\omega$ als kleine gerade Linien betrachtet werden, wovon die erstere auf BX und die andere auf BO senkrecht stehet. Aus den Enden x und ω lasse man senkrechte Linien auf die alten Richtungen ED und FP fallen, nämlich $x\varepsilon$ und $\omega\varphi$. Wenn dieses geschehen, so siehet man, daß die Kraft S in ihrer Richtung um den Raum $X\varepsilon$ fortgekommen ist, oder daß das Gewicht S um so viel gesunken ist, wenn man nämlich, wie schon erinnert worden, die Linien DE und ME als parallel betrachtet. Auf die nämliche Art wird man bemerken, daß die andere Kraft Q, ihrer Richtung zuwider, um den Raum $O\varphi$ zurück gegangen ist. Folglich ist $X\varepsilon$ die energische Geschwindigkeit der Kraft S, und diese ist positiv.

Desgleichen ist $O\varphi$ die energische Geschwindigkeit der Kraft Q, diese aber ist negativ. Die Energie der Kraft S ist demnach $S \times X\varepsilon$, und die Energie der Kraft Q ist $-Q \times O\varphi$. Unserem Lehrsatze zufolge muß demnach bewiesen werden, daß

$$S \times X\varepsilon = Q \times O\varphi$$

$$\text{oder } S \times X\varepsilon - Q \times O\varphi = 0$$

Die Dreiecke $X\varepsilon x$, BDX sind ähnlich, weil die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht stehen. Aus dem nämlichen Grunde sind auch die Dreiecke $O\varphi\omega$ und BPO ähnlich. Folglich haben wir folgende Proporzionen:

$$Xx, X\varepsilon :: BX, BD$$

$$O\omega, O\varphi :: BO, BP$$

Aus diesen beiden Proporzionen bekömmt man

$$BD = \frac{BX.X\varepsilon}{Xx}$$

$$BP = \frac{BO.O\varphi}{O\omega}$$

$$\text{folglich } BD, BP :: \frac{BX.X\varepsilon}{Xx}, \frac{BO.O\varphi}{O\omega}$$

Man bemerke ferner, daß die geraden Linien BX und BO bei der kleinen Bewegung des Hebels ähnliche Bögen, Xx und $O\omega$, beschreiben, so daß sich diese Bögen wie ihre Halbmesser verhalten. Daher ist

$$BX, BO :: Xx, O\omega$$

$$\text{folglich } \frac{BX}{Xx} = \frac{BO}{O\omega}$$

Also

Also bekömmt man bloß in der vorlezten Proporzion
$$BD, BP :: X\varepsilon, O\varphi.$$

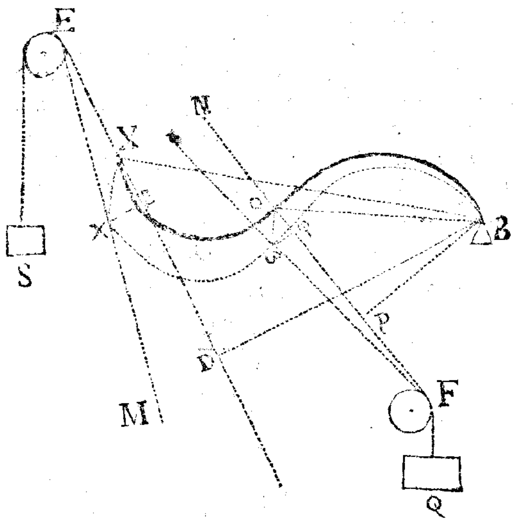
Da aber angenommen wurde, daß der Hebel vor der Bewegung in Gleichgewicht war, so ist (IV H. §4)

$$Q, S :: BD, BP$$

folglich auch $Q, S :: X\varepsilon, O\varphi$

also $Q \times O\varphi = S \times X\varepsilon$

und es ist die positive Energie der negativen gleich.



Bei dem Tragehebel und dem Wurfhebel ist der Beweis der nämliche, nur daß die Linien in der Figur eine etwas andere Lage bekommen. Die hier beigfügte Figur stellet einen Tragehebel vor, nämlich den krummen Hebel BOX, dessen Ruhepunkt in B ist; die eine Kraft wirket in der Richtung OF und die andere in der Richtung XE. Beide Kräfte werden hier durch die Gewichte Q und S vorgestellet. Es wird ferner angenommen, daß alles in Gleichgewicht sei, und daß folglich die Kräfte Q und S sich verhalten wie BD zu BP, nämlich umgekehrt wie die senkrechten Linien, die aus dem Ruhepunkte auf ihre Richtungen fallen. Gesetzet nun, der Hebel gerathe in Bewegung, und drehe sich unendlich wenig um seinen Ruhepunkt B, indem die eine Macht Q etwas Zuwachs bekömmt und dadurch das Uebergewicht gewinnet. Bei dieser kleinen Bewegung beschreiben die Punkte O und X kleine Zirkelbögen $O\omega$ und Xx, welche sich verhalten wie ihre Halbmesser, das ist, wie die geraden Linien BO, BX. Aus den Enden dieser Bögen fälle man die senkrechten Linien $\omega\varphi$ und $x\varepsilon$ auf die alten Richtungslinien, so ist das Dreieck $O\omega\varphi$ dem Dreieck BOP ähnlich, wegen der senkrechten Seiten. Aus dem nämlichen Grunde ist das Dreieck $Xx\varepsilon$ dem Dreieck BXD ähnlich. Folglich ist,

$$O\omega,\ O\varphi :: BO,\ BP$$

und $$X x,\ X\varepsilon :: BX,\ BD$$

daher $$BP = \frac{O\varphi . BO}{O\omega}$$

und $$BD = \frac{X\varepsilon . BX}{Xx}$$

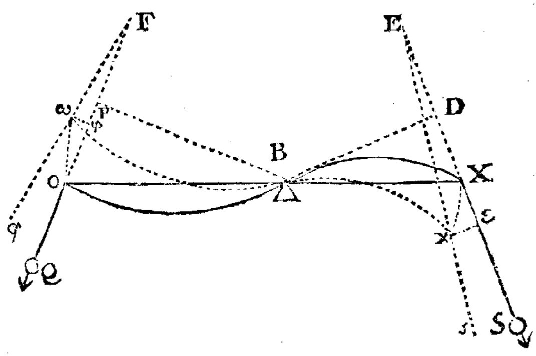
folglich $$BP,\ BD :: \frac{O\varphi . BO}{O\omega},\ \frac{X\varepsilon . BX}{Xx}$$

Nun ist $\frac{BO}{O\omega} = \frac{BX}{Xx}$, daher $BP,\ BD :: O\varphi,\ X\varepsilon$.

Nun

Nun aber ist BP, BD :: S, Q, folglich auch S, Q :: $O\varphi$, $X\varepsilon$. Daher $S \times X\varepsilon = Q \times O\varphi$. Woraus man siehet, daß hier die Energie beider Kräfte wiederum gleich ist. Wenn die Energie der Kraft Q positiv ist, so ist die Energie der Kraft S negativ.

Wir haben die Kräfte durch Gewichte vorgestellet, welche an Fäden hängen, die über Rollen gehen. Der Beweis ist nicht minder richtig, wenn die Kräfte ganz frei sind, und wenn man annimmt, daß jede Kraft nach einem gewissen Punkte, wie E oder F, hinzielet (vor. Fig.). Ferner kann man auch annehmen, daß jede Kraft eine kleine Bewegung bekömmt, vermittelst welcher ihre neue Richtung mit der vorhergehenden parallel bleibet. Weiter kann auch angenommen werden, daß das ganze System durch steife Linien verbunden bleibet, und sich in diesem Zustande um den Ruhepunkt unendlich wenig herumdrehet. In diesem Falle werden die Punkte E und F (folg. Fig.) wo die neuen Richtungen mit den alten zusammentreffen, und mit denselben unendlich kleine Winkel machen, in Betrachtung des Hebels eine entgegengesezte Lage bekommen.



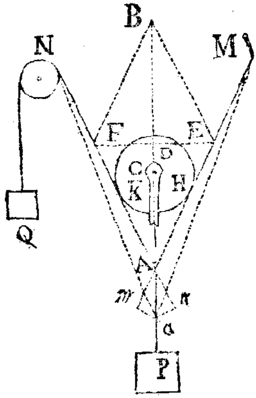
 Zum

Zum Exempel: der krumme Hebel XBO werde durch die Kräfte S und Q in Gleichgewicht gehalten, welche nach den Richtungen ES und FQ ziehen. Gesezt nun, die Kraft S bekomme eine kleine Vermehrung, und der Hebel drehe sich unendlich wenig um seinen Ruhepunkt B. Man stelle sich dabei vor, daß die Linien SX und QO steif und mit dem Hebel verbunden sind, daß aber dabei die Kräfte in der jedesmaligen Richtung dieser Linien wirken; so werden bei der kleinen Umdrehung des Hebels die Richtungs-Linien die Lagen E*s* und F*q* bekommen, so daß diese neuen Richtungs-Linien bei E und F mit den vorigen unendlich kleine Winkel machen, und mit denselben für parallel gehalten werden können. Uebrigens wird der Beweis allemal der nämliche bleiben. Nur muß jede neue Richtungs-Linie entweder mit der alten einen unendlich kleinen Winkel machen, oder sie muß völlig mit derselben parallel sein.

§. 19.

Nachdem wir den Lehrsaz von der Gleichheit der positiven und negativen Energien in Rücksicht auf den Hebel bewiesen haben, so wollen wir jezt zeigen, daß er auch bei den übrigen Maschinen seine Richtigkeit hat. Nach dem Hebel pfleget unter den einfachen Maschinen die Rolle zu folgen. Diese ist zweierlei, nämlich die befestigte Rolle und die freie oder bewegliche. Was die befestigte Rolle anbelangt, so ist bewiesen, daß bei derselben, im Falle des Gleichgewichts, Kraft und Resistenz gleich sein müssen (VI H. §3). Ferner, wenn eine Bewegung entstehet, so ist leicht einzusehen, daß die Resistenz in ihrer Richtung eben so weit zurückläuft, als die Kraft vorwärts gehet. Also sind die energischen Geschwindigkeiten beiderseits gleich. Da nun auch Kraft und Resistenz gleich sind, so sind die Energien ebenfalls gleich, nämlich die positive Energie der Kraft ist der negativen Energie der Resistenz gleich. Laßt uns nun die bewegliche Rolle betrachten.

Es



Es hänget das Gewicht P aus dem Mittelpunkte C einer Rolle HK, welche durch ein Strick MHKNQ gehalten wird. Das eine Ende des Strickes ist in M an einem Nagel oder Haken befestiget. Das andere Ende wird durch irgend eine Kraft oder durch ein Gewicht Q in der Richtung KN gezogen.

Verlängert man die Linien MH und NK, so müssen sie der vertikalen Richtungslinie CP des Gewichts P irgendwo in A begegnen. Denn da der Nagel M, die Kraft Q und die Last P einander das Gleichgewicht halten sollen, so müssen die Richtungen ihrer Wirkungen nothwendig in einem Punkte zusammentreffen (III H. § 14). Hieraus folget ferner, daß die Winkel CAH und CAK, oder CAM und CAN, gleich sind. Denn es ist leicht einzusehen, daß, wenn man aus einem Punkte A zwei Tangenten AH und AK, und auch eine Linie AC durch den Mittelpunkt ziehet, die Winkel beiderseits gleich sein müssen. Daraus folget noch, daß der Widerstand M des Nagels der Kraft Q gleich ist. Denn es ist M, Q :: S(CAN), S(CAM) (III H. § 15). Da nun $\angle$ CAN $=$ $\angle$ CAM, so ist S (CAN) $=$ S (CAM). Folglich M $=$ Q.

Lasset uns nun annehmen, die Last P bekomme das Uebergewicht über die Kraft Q, und sinke von A bis *a*, oder durchlaufe das Räumchen A*a*. So verwandelt sich die Richtung MA in M*a*, und die Richtung NA in N*a*. Aus dem Punkte *a* fälle man die senkrechten Linien *am* und *an* auf die Verlängerungen der vorigen Richtungen, so hat sich die Linie MA um A*m*, und NA um A*n*, verlängert. Um eben so viel haben sich die Stricke MH und NK verlängert. Folglich hat sich das Strick NQ um A*n* + A*m* verkürzet. Also ist A*m* + A*n* der Raum, welchen die Kraft Q in entgegengesezter Richtung durchlaufen hat, unterdessen daß das Gewicht P den Weg A*a* in seiner Richtung beschrieben hat; vorausgesetzet nämlich, daß die Bewegung unendlich klein sei. In diesem Falle also ist A*n* + A*m* die negative energische Geschwindigkeit der Kraft Q, und A*a* ist die positive energische Geschwindigkeit der Last P.

Auf der verlängerten vertikalen Linie PC nehme man nach Belieben den Theil AB. Man ziehe BF mit MA und BE mit NA parallel, so bekönmt man das Parallelogramm AEBFA. Man ziehe noch die Diagonal-Linie EF, welche die andere AB in D schneiden wird. Stellet nun AF die Kraft Q vor, so muß AE der AF gleich sein, um den Widerstand des Nagels in M vorzustellen. Das Parallelogramm AEBFA ist demnach ein verschobenes Viereck oder ein Rhombus.

Es ist also leicht einzusehen, daß beide Diagonallinien AB und EF einander senkrecht schneiden und halbiren. Ferner da AF und AE die Kraft Q und den Widerstand

in

in M vorstellen, so stellet die Diagonallinie AB die aus beiden zusammengesezte Kraft vor, und im Falle des Gleichgewichtes, stellet die nämliche AB die Kraft des Gewichtes P vor, weil dieses Gewicht jener zusammengesezten Kraft gleich und entgegengesezt seyn muß.

Die Dreiecke Ama und ADE, ferner ADE und ADF, desgleichen ADF und Ana sind alle vier ähnlich, welches leicht zu beweisen ist.

Die Kraft Q welche durch AF vorgestellet wird, läßt sich in zwei zerlegen, nämlich DF und AD, wovon der Theil AD eigentlich dem Gewichte P entgegen wirket. Desgleichen wird die Kraft des Nagels in M auch in zwei zerleget, nämlich DF, welche die Kraft DF vernichtet, und AD oder DB, welche auch dem Gewichte P entgegen wirket.

Lasset uns den Theil AD der Kraft AF oder Q mit D bezeichnen, so wird auch der Theil AD oder DB der Kraft AE oder M derselbigen Größe D gleich sein. Also ist

$$\mathrm{AE}, \mathrm{AD} :: \mathrm{M}, \mathrm{D}$$

nun ist $\mathrm{AE}, \mathrm{AD} :: \mathrm{A}a, \mathrm{A}m$

folglich $\mathrm{A}a, \mathrm{A}m :: \mathrm{M}, \mathrm{D}$

daher $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{M.\,A}m}{\mathrm{A}a}$

ferner $\mathrm{AF}, \mathrm{AD} :: \mathrm{Q}, \mathrm{D}$

nun ist $\mathrm{A}a, \mathrm{A}n :: \mathrm{AF}, \mathrm{AD}$

folglich $\mathrm{A}a, \mathrm{A}n :: \mathrm{Q}, \mathrm{D}$

daher $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{Q.\,A}n}{\mathrm{A}a}$

Addiret man beide Werthe von D, so bekömmt man

$$2\ D = \frac{M.Am + Q.An}{Aa}$$

Nun ist $2\ D = AB = P$, folglich

$$P = \frac{M.Am + Q.An}{Aa}$$

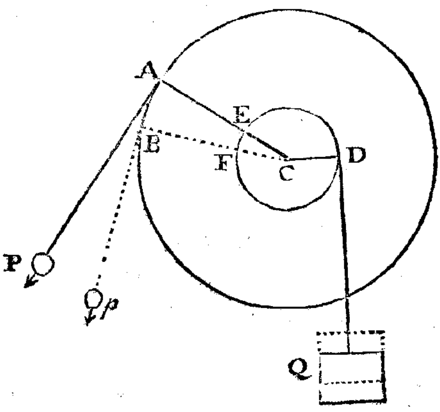
oder $P.\ Aa = M.\ Am + Q.\ An$

oder $P.\ Aa = Q.\ (An + Am)$, weil $M = Q$

Also ist hier die positive Energie des Gewichts der negativen Energie der Kraft gleich.

§. 20.

Bei der Winde fällt der Beweis noch leichter.



Jn

In gegenwärtiger Figur stellet der innere Zirkel einen Zylinder vor, um welchen ein Strick gewickelt ist, welches das Gewicht Q trägt. Der auswendige Zirkel bedeutet ein Rad vermittelst dessen der Zylinder gedrehet wird. Wir nehmen an, daß die Richtung der Kraft P allemal die Tangente des äusseren Zirkels sei, welches der gewöhnlichste und vortheilhafteste Fall ist. Wir wissen schon, daß das Gleichgewicht erfordert, daß die Kraft P sich zur Resistenz Q verhalte wie CD oder CE oder CF zu CA oder CB (VI H. § 10). Gesezt nun die Kraft P bekomme ein kleines Uebergewicht, und verursache eine kleine Bewegung, so daß sie mit ihrer Richtungslinie aus der Lage AP in die Lage Bp versetzet werde; so ist sie in ihrer Richtung vorwärts gegangen, um den Theil AB. Unterdessen ist das Gewicht Q, seiner Richtung zuwider, gestiegen um einen Theil, welcher dem kleinen Bogen EF gleich ist. Da nun beide Bögen EF und AB ähnlich sind, so ist

EF, AB :: CE, CA

nun ist CE, CA :: P, Q

folglich EF, AB :: P, Q

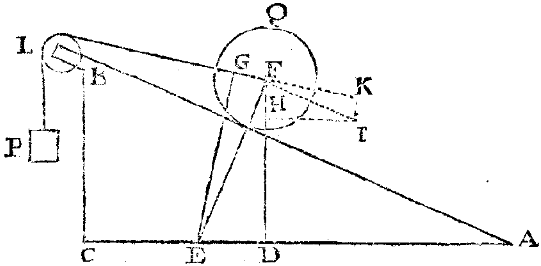
also Q. EF = P. AB

Nun sind EF und AB die energische Geschwindigkeiten, die erste ist negativ, und die zweite positiv. Folglich ist die negative Energie Q. EF der positiven Energie P. AB gleich.

§. 21.

Lasset uns den Beweis jezt von der schiefen Ebene führen. Es sei AB eine schiefe Ebene, wovon AC die horizontale Länge und BC die vertikale Höhe ist. Auf dieser Ebene ruhe das Gewicht Q, indem es durch die Kraft P, welche

welche in einer beliebigen Richtung FL wirket, in Gleichgewicht gehalten wird.



Aus dem Schwerpunkte F ziehe man die Linie FE senkrecht durch AB, und von beliebiger Länge. Wir haben sie, der Bequemlichkeit wegen, bis zur horizontalen Linie AC geführet. Aus dem nämlichen Punkte F fälle man die vertikale Linie FD, als die Richtungslinie der Fallkraft, welche den Körper Q nach der Erde hintreibet. Aus E lasse man senkrechte Linien ED und EG auf beide Richtungen FD und FL fallen, so ist, wie schon bewiesen worden (VI H. § 19)

P, Q :: ED, EG

Gesetzt nun, der Körper Q bekomme ein kleines Uebergewicht, und laufe in einem unendlichen Zeittheilchen von F bis I, so daß FI mit der schiefen Ebne AB parallel sei. Aus I lasse man senkrechte Linien IH und IK auf beide Richtungen FD und FL fallen, nachdem man die leztere verlängert hat. So ist das Dreieck IKF dem Dreieck FGE ähnlich, weil die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht sind. Aus dem nämlichen Grunde ist das Dreieck IHF dem Dreieck FDE ähnlich. Da nun die Trapezen FDEGF und IHFKI aus ähnlichen Dreiecken beste-

bestehen, so sind sie selbst ähnlich, folglich stehen ihre homologen Seiten in gleichem Verhältnisse. Also ist

$$FH, FK :: ED, EG$$

und da $ED, EG :: P, Q$

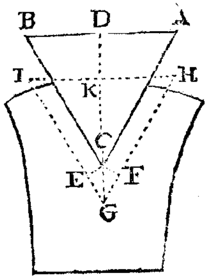
so ist $FH, FK :: P, Q$

daher $Q \times FH = P \times FK$

Nun zeiget die Linie FH an, um wie viel der Körper Q, seiner vertikalen Richtung zufolge, herunter gegangen ist, und bedeutet folglich die positive energische Geschwindigkeit des Gewichts oder der Kraft Q, so daß $Q \times FH$ die positive Energie dieser Kraft Q ist. Hingegen die Linie FK zeiget an, um wie viel die Kraft P in einem unendlich kleinen Zeittheilchen ihrer Richtung zuwider hat müssen zurückgehen. Es ist demnach $P \times FK$ die negative Energie der Kraft P, und es sind beide Energien einander gleich.

§. 22.

Wir kommen jezt zum Keil. Es sei ACB ein Keil, der schon in einen festen Körper zum Theil eingedrungen



ist

ist und durch eine Kraft bei D in Gleichgewicht gehalten wird. So ist schon bekannt, daß die Kraft sich zum Widerstande, welchen beide Seiten des Keiles leiden, verhält, wie AB zu BC+AC (VI H. §23). Oder, wenn man, wie gewöhnlich, annimmt, daß der Keil gleichseitig ist, und daß die Kraft auf die Mitte des Kopfes wirket, so verhält sich die halbe Kraft zum Widerstande auf der einen Seite des Keiles wie DB zu BC. Es sei demnach die halbe Kraft $= \frac{1}{2}F$, und die Resistenz auf der einen Seite sei $= R$, so ist

$$\tfrac{1}{2}F, R :: DB, BC$$

Nun nehme man an, die Kraft bei D bekomme das Uebergewicht, so daß der Keil weiter eindringe und samt der Kraft den unendlich kleinen Raum DK oder CG durchlaufe, nämlich, daß der Keil in die Lage HGI komme. Aus C ziehe man CE und CF senkrecht auf GI und GH, so sind CE und CF die Räumchen, welche die Resistenzen beiderseits, ihrer Richtung zuwider, zurückgeleget haben, unterdessen daß die Kraft in ihrer Richtung um CG weiter gekommen ist. Die Dreiecke DCB und EGC sind ähnlich, weil sie beide rechtwinklicht sind, und weil die Winkel in C und in G gleich sind. Also ist

$$CE, CG :: DB, BC$$

nun war $DB, BC :: \tfrac{1}{2}F, R$

folglich $CE, CG :: \tfrac{1}{2}F, R$

daher $R.\ CE = \tfrac{1}{2}F.\ CG.$

Wenn man für die andere Seite des Keils eben so urtheilet, so wird man finden, für die andere Hälfte der Kraft und die andere Resistenz, welche auch $= R$ ist,

$$R.\ CF = \tfrac{1}{2}F.\ CG$$

Addi-

Addiret man beide Gleichungen, so ist

$$R.\ CE + R.\ CF = F.\ CG$$

Das heißt, die negativen Energien beider Widerstände sind zusammen der positiven Energie der Kraft gleich.

§. 23.

Bei der Schraube findet das Gesez der gleichen Energien nicht minder statt. Gesezt, die Spindel sei vertikal und unbeweglich, hingegen die Schraubenmutter werde vermittelst eines Hebels herumgedrehet (VI H. §26), so wissen wir schon, daß die Schraubenmutter und folglich auch das daran hängende Gewicht um eine Stufe steiget, unterdessen daß die Kraft einmal herumgehet. Es ist auch leicht einzusehen, daß das Steigen des Widerstandes einförmig ist, so bald das Drehen der Kraft einförmig ist; oder daß, wenn die Kraft den $n$ten Theil ihres Kreises durchläuft, alsdann der Widerstand auch den $n$ten Theil einer Stufenhöhe durchläuft. Es sei P die Kraft und C die Kreislinie, welche sie sich zu beschreiben bestrebet, h sei die Höhe einer Schraubenstufe und Q die Resistenz, so wissen wir schon, daß (VI H. §27) $P,\ Q :: h,\ C.$

Nun werde das Gleichgewicht gehoben durch eine kleine Vermehrung der Kraft P, und diese Kraft beschreibe einen unendlich kleinen Theil α ihres Kreises, unterdessen aber steige die Resistenz um das Theilchen β einer Stufenhöhe, so ist, vermöge der gedachten Einförmigkeit,

$$\beta,\ \alpha :: h,\ C$$

da nun $h,\ C :: P,\ Q$

so ist $\beta,\ \alpha :: P,\ Q$

folglich $Q.\ \beta = P.\ \alpha$

und

und also ist die positive Energie der Kraft der negativen Energie der Resistenz gleich.

Das nämliche läßt sich von der Schraube ohne Ende beweisen (VI H. § 30). Es sei wiederum P die Kraft, welche den Hebel herumdrehet, und C der Kreis, den sie beschreibet, h die Schraubenstufe R der Halbmesser des Rades, r der Halbmesser der Welle, um welches sich das Strick wikkelt, und Q die am Stricke hängende Resistenz. Gesezt, die zum Gleichgewichte erforderliche Kraft werde etwas vermehret, und diese Kraft durchlaufe ein Räumchen $= \alpha$, unterdessen daß die Resistenz das Räumchen β durchläuft. Wenn wir nun jedesmal den Zahn, der in die Schraube eingreift, als einen Widerstand betrachten, welchen der Schraubengang in der Richtung der Axe der Spindel forttreibet, so verhält sich der von der Kraft durchlaufene Raum α zu dem von dem Zahn durchlaufene Raum wie C zu h, (§ 23) das ist

$$C, h :: \alpha, \frac{\alpha. h}{C}$$

und dieser Bruch drücket den vom eingreifenden Zahne beschriebenen Theil eines Zirkels aus, welcher R zum Halbmesser hat. Unterdessen durchläuft die Resistenz Q den Raum β, und das Strick durchläuft auf der Welle diesen nämlichen Rauch β in einer Zirkel-Linie, welche r zum Halbmesset hat. Nun verhalten sich die ähnlichen Zirkel-Bögen wie die Halbmesser. Folglich ist

$$\frac{\alpha. h}{C}, \beta :: R, r$$

daher $$R. \beta = \frac{\alpha. h. r}{C}$$

oder $$R. C. \beta = r. h. \alpha$$

oder $$\alpha, \beta :: (R. C), (r h.)$$

Nun

Nun ist aber schon bekannt, daß im Falle des Gleichgewichts (VI H. § 30) $Q, P :: (R. C), (r. h)$

folglich $\alpha, \beta :: Q, P$

daher $Q. \beta = P. \alpha$

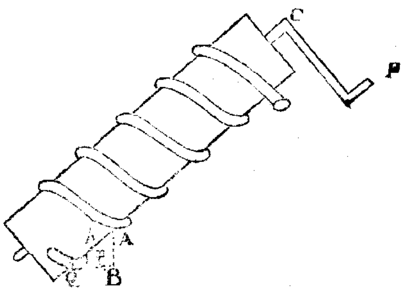
und also sind die Energien gleich, indem α und β die energischen Geschwindigkeiten anzeigen.

Bei der Archimedischen Schraube ist, wenn wir 1 zum Halbmesser der Tafeln annehmen, (VI H. § 29)

$$P, Q \mathfrak{S} \varphi :: h, C$$

$$P, Q :: h, \frac{C}{\mathfrak{S} \varphi}$$

$$P, Q :: h \mathfrak{S} \varphi, C$$



Unterdessen daß die Kraft P eine Kreislinie, welche wir C nennen, beschreibet, durchläuft das in der Röhre liegende Gewicht Q in schiefer Richtung die Schraubenstufe QA, welche durch h bezeichnet worden. Aus A fälle man die vertikale Linie AB und man ziehe die horizontale QB, so ist klar, daß das Gewicht Q bei jeder Umdrehung der Schraube in vertikaler Richtung sich so weit erhebet, als die Linie AB beträgt. Es ist φ der Neigungswinkel AQB der Schraube gegen den Horizont, folglich $AB = h . \mathfrak{S}\varphi$. Jedesmal also, wenn die Kraft den Raum C durchläuft, so steiget die Resistenz, ihrer Richtung zuwider, um die Quantität $h . \mathfrak{S}\varphi$. Bei dieser Schraube, wie bei den übrigen, ist leicht einzusehen, daß die Resistenz einförmig steigen muß, so bald die Kraft einförmig drehet. Gesezt also, die Kraft durchlaufe das Räumchen α, und die Resistenz zu gleicher Zeit das Räumchen β, so ist

$$\alpha, \beta :: C, (h. \mathfrak{S}\varphi)$$

da aber $Q, P :: C, (h. \mathfrak{S}\varphi)$

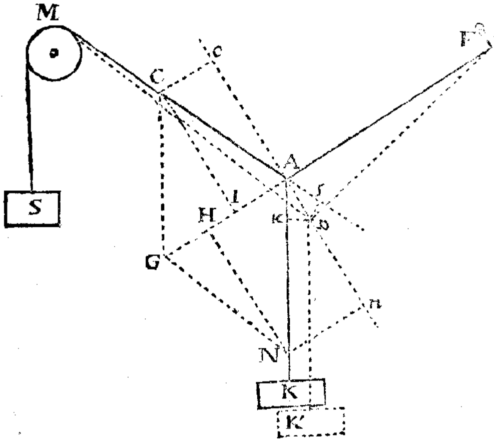
so ist $\alpha, \beta :: Q, P$

folglich $P. \alpha = Q. \beta$

und also sind auch hier die entgegengesezten Energien gleich.

§. 24.

Zulezt bleibet uns noch übrig, die Gleichheit der Energien bei der Seilmaschine zu beweisen.



Es sei A ein Knoten, welcher die Stricke AF, AM, AK verbindet. Das Strick F ist an einem Nagel oder Haken gebunden. Das Strick AM gehet uber eine Rolle und träget das Gewicht S, oder wird durch sonst eine Kraft gezogen. Das Strick AK trägt ein Gewicht K, oder es wird ebenfalls durch eine andere Kraft gezogen. Aus dem Punkte A nehme man auf den Richtungen AM und AK die Linien AC und AN, in eben solchem Verhältnisse wie die Kräfte S und K. Ziehe CG mit AN und NG mit AC parallel, so stellet die Diagonal-Linie AG eine Kraft vor, die aus beiden AC und AN zusammengesezt ist. Und wenn das Gleichgewicht statt finden soll, so muß die Linie AG mit AF eine einzige gerade Linie ausmachen, weil die Kraft des Nagels F diese zusammengesezte Kraft AG vernichten soll. Aus den Punkten C und N fälle CI und NH auf AG senkrecht, so stellen diese beiden senkrechten Linien diejenigen Theile der Kräfte S und K vor, welche in entgegengesezter Richtung wirken und einander aufheben, weil sie gleich sind. Daß sie aber gleich sind, läßt sich leicht daraus schließen, weil die Dreiecke ACI und GNH ähnlich-gleich sind.

Nun stelle man sich vor, die Kraft K bekomme ein kleines Uebergewicht, und verursache eine kleine Bewegung, so beschreibet das Strick FA einen kleinen Zirkelbogen Aa, welchen man als eine kleine gerade Linie betrachten kann, die auf FA oder FG senkrecht ist. Das Strick FA kömmt also in die Lage Fa, MA kömmt in die Lage Ma, und AK kömmt in die Lage AK'.

Durch A und a ziehe man eine gerade Linie von unbestimmter Länge, so wird dieselbe auf FG senkrecht sein. Aus den Punkten C und N fälle man auf die vorher gezogene unbestimmte Linie die senkrechten Linien Cc und Nn, so wird Ac = An, wegen der Parallelogramme Ic und Hn, und weil CI = HN; und diese beiden Linien Ac, An stellen sowohl als CI und HN die entgegengesezten und gleichen Wirkungen der Kräfte S und K vor. Wenn wir also die Wirkung der Kraft S nach der Richtung Ac durch c, und die Wirkung der Kraft K nach der Richtung An durch n andeuten, so ist $c = n$.

Aus dem Punkt a fälle man auf die Richtungslinien MA und AK, deren erstere verlängert wird, die senkrechten Linien as und ak, so sind die Theilchen As und Ak die energischen Geschwindigkeiten der Kräfte S und K. Die Dreiecke Aas und ACc sind ähnlich, wegen der beiden rechten Winkel, und der beiden gleichen Winkel bei A. Aus dem nämlichen Grunde sind die Dreiecke Aak und ANn auch ähnlich. Folglich ist

$$Aa, As :: AC, Ac :: S, c$$

$$Aa, Ak :: AN, An :: K, n$$

Diese beiden Proporzionen geben

$$c = \frac{S.As}{Aa}$$

$$n = \frac{K.ak}{Aa}$$

Da nun $c = n$, so bekömmt man

$$\frac{S.As}{Aa} = \frac{K.Ak}{Aa}$$

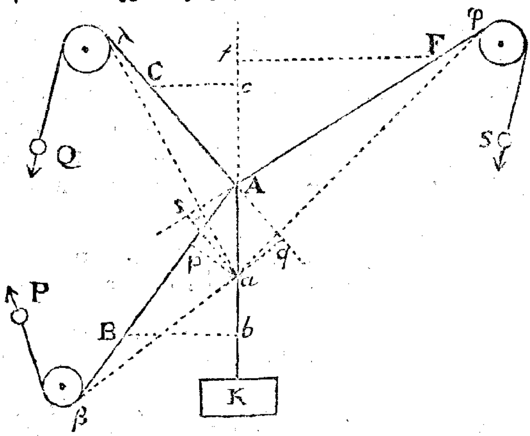
oder $$S.As = K.Ak$$

Daher siehet man, daß auch bei dieser Maschine die Energien gleich sind.

§. 25.

Anstatt der gemeinen und einfachen Seilmaschine, laßt uns einen allgemeineren Fall annehmen, da nämlich ein

ein Gewicht K von so viel Kräften als man will, P, Q, S, u. s. f. in Gleichgewicht gehalten wird.



Das Gewicht K hänget am Knoten A, wo sich die Stricke Aβ, Aλ, Aφ vereinigen, welche über Rollen geleget sind, und woran die Kräfte P, Q, S ziehen. Auf diesen Stricken, vom Punkte A aus, nehme man die Linien AB, AC, AF, so daß sie sich gegen einander verhalten wie die Kräfte P, Q, S. Aus den Enden B, C, F gedachter Verhältniß-Linien fälle man die senkrechten Linien Bb, Cc, Ff auf die Richtungslinie fAK des Gewichtes K. Nun nehme man, von A nach K zu, eine unendlich kleine Linie Aa. Aus dem Punkte a fälle man die senkrechten Linien ap, aq, as auf die (nöthigenfalls verlängerten) Richtungen der Kräfte P, Q, S. Wenn dieses geschehen, so ist leicht einzusehen, daß

$$\triangle\, Apa \backsim \triangle\, AbB$$
$$\triangle\, Aqa \backsim \triangle\, AcC$$
$$\triangle\, Asa \backsim \triangle\, AfF$$

weil diese Dreiecke zwei und zwei bei A gleiche Winkel haben, und sie überdem rechtwinklicht sind. Nun ist die Kraft AB oder P in zwei zerleget, nämlich Bb und Ab, welche leztere wir mit b bezeichnen wollen. Eben so sei c der Theil Ac der Kraft AC oder Q, und es sei f der Theil Af der Kraft AF oder S. Diese Zerlegung der Kräfte läßt sich leicht begreifen, wenn man sich anstatt der Dreiecke AbB, AcC, AfF Parallelogramme gedenket, wovon AB, AC und AF die Diagonal-Linien sind.

Alles dieses vorausgesezet, so ist

$$\mathrm{A}a, \mathrm{A}p :: \mathrm{AB}, \mathrm{A}b :: \mathrm{P}, b \left(= \frac{\mathrm{P}.\ \mathrm{A}p}{\mathrm{A}a}\right)$$

$$\mathrm{A}a, \mathrm{A}q :: \mathrm{AC}, \mathrm{A}c :: \mathrm{Q}, c \left(= \frac{\mathrm{Q}.\ \mathrm{A}q}{\mathrm{A}a}\right)$$

$$\mathrm{A}a, \mathrm{A}s :: \mathrm{AF}, \mathrm{A}f :: \mathrm{S}, f \left(= \frac{\mathrm{S}.\ \mathrm{A}s}{\mathrm{A}a}\right)$$

Soll nun das Gleichgewicht statt finden, so müssen die Kräfte c und f, welche aufwärts ziehen, den Kräften b und K, welche niederwärts ziehen, gleich sein. Also ist

$$c + f = b + \mathrm{K}$$

oder $$c + f - b = \mathrm{K}$$

oder $$\frac{\mathrm{Q}.\ \mathrm{A}q}{\mathrm{A}a} + \frac{\mathrm{S}.\ \mathrm{A}s}{\mathrm{A}a} - \frac{\mathrm{P}.\ \mathrm{A}p}{\mathrm{A}a} = \mathrm{K}$$

Folglich ist im Falle des Gleichgewichtes

$$\mathrm{Q}.\ \mathrm{A}q + \mathrm{S}.\ \mathrm{A}s - \mathrm{P}.\ \mathrm{A}p = \mathrm{K}.\ \mathrm{A}a$$

oder auch $$\mathrm{Q}.\ \mathrm{A}q + \mathrm{S}.\ \mathrm{A}s = \mathrm{K}.\ \mathrm{A}a + \mathrm{P}.\ ap$$

Nun bilde man sich ein, die Last K bekomme durch eine fremde Macht das Uebergewicht, und sinke in ihrer eige-

eigenen Richtung um den unendlich kleinen Theil Aa, so bekommen die Stricke Aβ, Aλ, Aφ die neuen Lagen $a\beta$, $a\lambda$, $a\varphi$, und die kleinen Linien Ap, Aq, As zeigen an, um wie viel jede Kraft entweder in ihrer Richtung, oder ihrer Richtung zuwider, fortgekommen ist, unterdessen daß das Gewicht K von A nach a gesunken ist.

Folglich ist Aa die energische Geschwindigkeit des Gewichtes K, und Ap die energische Geschwindigkeit der Kraft P. Beide sind positiv, weil K und P ihrer Richtung folgen. Also sind K. Aa und P. Ap die positiven Energien der Kräfte K und P. Hingegen sind Aq und As die negativen energischen Geschwindigkeiten der Kräfte Q und S, weil beide ihrer Richtung zuwider gehen, und Q. Aq, S. As sind deren negative Energien. Da nun

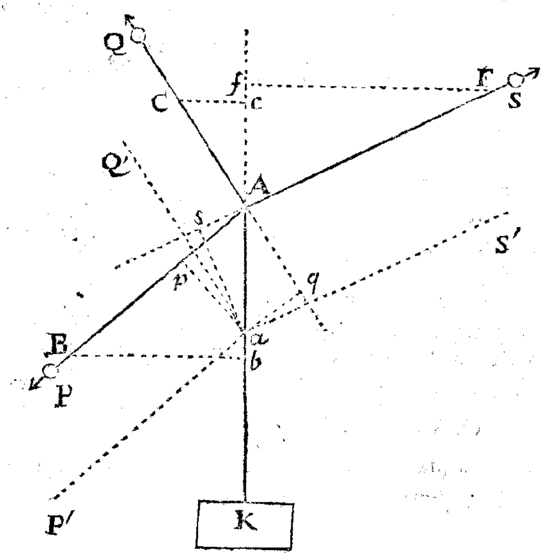
$$Q.\,Aq + S.\,As = K.\,Aa + P.\,Ap$$

so sind die als positiv betrachteten negativen Energien den wirklich positiven Energien gleich.

§. 26.

Es sei in folgender Figur wiederum ein Gewicht K, welches am Knoten A herunter hänget, welcher Knoten von drei Kräften P, Q, S gezogen wird, die frei sind, so daß die Stricke AP, AQ, AS nicht wie vorher

(Siehe die folgende Figur.)



über Rollen gehen. Man verlängere wiederum die Richtung AK des Gewichtes K. Auf den Stricken nehme man die Theile AB, AC, AF, welche sich wie die Kräfte P, Q und S verhalten. Aus den Punkten B, C, F fälle man die senkrechten Linien Bb, Cc, Ff auf die Richtung AK oder fK des Gewichtes, so stellen Ab, Ac, Af die in der Richtung fK oder Kf wirkenden Theile der Kräfte P, Q, S vor, welche Theile wir mit b, c, f bezeichnen wollen. Man wähle in der Linie AK einen Punkt a in einer beliebigen (endlichen oder unendlich kleinen) Entfernung vor A. Aus a fälle man auf die nöthigenfalls verlängerten Richtungen der Kräfte die senkrechten Linien ap, aq, as, so entstehen, wie bei §25, die ähnlichen Dreiecke

Apa

Apa und AbB, Aqa und AcC, Asa und AfF. Folglich wird man wie dort schließen können

$$Aa, Ap :: AB, Ab :: P, b \left(= \frac{P.Ap}{Aa}\right)$$

$$Aa, Aq :: AC, Ac :: Q, c \left(= \frac{Q.Aq}{Aa}\right)$$

$$Aa, As :: AF, Af :: S, f \left(= \frac{S.As}{Aa}\right)$$

Das Gleichgewicht erfordert, daß

$$c + f = b + K$$

folglich $\dfrac{Q.Aq}{Aa} + \dfrac{S.As}{Aa} = \dfrac{P.Ap}{Aa} + K$

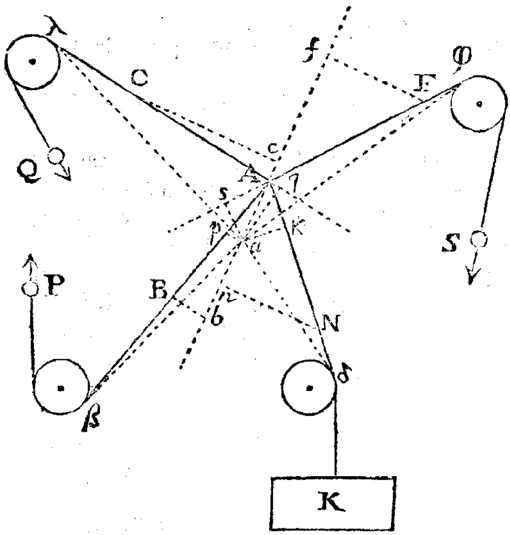
oder $Q.Aq + S.As = P.Ap + K.Aa$

Nun bilde man sich ein, daß das ganze System, längs der Linie AK bis in a herunter sinken, so daß die Richtungen der Kräfte, jede mit sich selbst, parallel bleiben, daß AP in die Lage aP', AQ in die Lage aQ', AS in die Lage aS' komme. So ist das Gewicht K um Aa gesunken. Die Kraft P ist um Ap in ihrer eignen Richtung fortgekommen. Die Kräfte Q und S sind, ihren Richtungen zuwider, um Aq und As zurückgegangen. Es sind demnach $K.Aa$ und $P.Ap$ die positiven Energien des Gewichtes K und der Kraft P. Hingegen sind $Q.Aq$ und $S.As$ die entgegengesezten Energien der Kräfte Q und S. Die Summen der Energien sind beiderseits gleich.

Hier siehet man also, daß das Gesez der gleichen Energien, auch bei endlichen Bewegungen wahr ist, wenn sich das ganze System in einer geraden Linie beweget, und wenn die Richtungen der Kräfte sich selbst parallel bleiben. In anderen Fällen behauptet es seine Wahrheit nur in so fern, bei einer unendlich kleinen Bewegung, die unendlich wenig veränderten Richtungen noch als mit sich selbst parallel betrachtet werden können.

§. 27.

In beiden vorigen Paragraphen wurde vorausgesezzet, daß der Knoten, welcher alle Stricke vereiniget, sich in der Richtung des Gewichts, oder überhaupt einer der Kräfte bewege. Es kann aber auch die Bewegung desselben nach jeder anderen beliebigen Richtung geschehen.



Die Kräfte P, Q, S und das Gewicht K ziehen den Knoten A, vermittelst der Stricke Aβ, Aλ, Aφ und Aδ, welche

welche über Rollen gehen, und sind so proporzioniret, daß sie einander und folglich auch den Punkt A in Gleichgewicht halten. Man nehme, wie bei vorigen Fällen, die Linien AN, AB, AC, AF, um die Kräfte K, P, Q, S vorzustellen. Durch den Punkt A ziehe man in beliebiger Richtung eine gerade Linie fb, und auf dieselbe fälle man aus den Punkten N, B, C, F die senkrechten Linien Nn, Bb, Cc, Ff; so stellen die Linien An, Ab, Ac, Af die Wirkungen der Kräfte K, P, Q, S in der Richtung bf vor, welche Wirkungen wir durch die Buchstaben n, b, c, f andeuten wollen. Da alles in Gleichgewicht ist, so müssen die Wirkungen n und b einerseits, den Wirkungen c und f anderseits gleich sein. Denn, wäre dieses nicht, so würde der Punkt A nicht gleich stark nach b und nach f hingezogen, folglich würde er sich in der Linie fb bewegen, welches der Voraussetzung zuwider ist. Es ist demnach nothwendig, daß

$$n + b = c + f$$

Nun nehme man auf der Linie fb einen willkürlichen Punkt a, und fälle aus demselben auf die (nöthigenfalls verlängerten) Richtungslinien der Kräfte die senkrechten Linien ak, ap, aq, as, so ist

$$\triangle\, \mathrm{A}ka \backsim \triangle\, \mathrm{A}n\mathrm{N}$$

$$\triangle\, \mathrm{A}pa \backsim \triangle\, \mathrm{A}b\mathrm{B}$$

$$\triangle\, \mathrm{A}qa \backsim \triangle\, \mathrm{A}c\mathrm{C}$$

$$\triangle\, \mathrm{A}sa \backsim \triangle\, \mathrm{A}f\mathrm{F}$$

weil diese Dreiecke rechtwinklicht sind, und außerdem zwei und zwei bei A gleiche Winkel haben. Daraus folget nun,

daß

daß

$$Aa,\ Ak :: AN,\ An :: K,\ n \left(= \frac{K.\,Ak}{Aa}\right)$$

$$Aa,\ Ap :: AB,\ Ab :: P,\ b \left(= \frac{P.\,Ap}{Aa}\right)$$

$$Aa,\ Aq :: AC,\ Ac :: Q,\ c \left(= \frac{Q.\,Aq}{Aa}\right)$$

$$Aa,\ As :: AF,\ Af :: S,\ f \left(= \frac{S.\,As}{Aa}\right)$$

Da nun, wie vorher erinnert worden, $n + b = c + f$, so ist

$$\frac{K.\,Ak}{Aa} + \frac{P.\,Ap}{Aa} = \frac{Q.\,Aq}{Aa} + \frac{S.\,As}{Aa}$$

folglich $K.\,Ak + P.\,Ap = Q.\,Aq + S.\,As$

Gesezt nun, es werde der Knoten A durch irgend eine fremde Macht in Bewegung gesetzet, oder es werden einige Kräfte etwas vermehret oder vermindert, überhaupt es geschehe eine Veränderung, so daß die ganze Maschine in Bewegung gerathe, und der Punkt A die unendlich kleine Linie Aa durchlaufe, so verändern sich auch die Richtungslinien der Kräfte. Es kömmt δA in die Lage δa, βA in die Lage βa, λA in λa, ϕA in ϕa, jedoch so, daß die neuen Richtungen, wegen der unendlichen Kleinheit der Bewegung, noch mit den alten für parallel gehalten werden können. So sind die Kräfte K und P in ihren Richtungen um Ak und Ap fortgerücket. Hingegen die Kräfte Q und S sind ihren Richtungen zuwider um Aq und As zurückgegangen. Folglich sind $K.\,Ak$ und $P.\,Ap$ die positiven Energien der Kräfte K und P. Hingegen sind $Q.\,Aq$ und $S.\,As$ die negativen Energien der Kräfte Q und

und S. Es ist demnach die Summe der positiven Energien, der als positiv betrachteten Summe der negativen Energien gleich.

§. 28.

Laßt uns ferner annehmen, daß die Richtungen der Kräfte wirklich parallel bleiben. Z. E. Man stelle sich vor die Rollen δ, β, λ, φ (vor. Fig.) seien an einem vertikalen Brette befestiget, welches also das Gestell der ganzen Maschine wäre. Nun werde das Brett in einer geraden Linie von einer fremden Kraft beweget, so daß alle Punkte desselben parallele und gerade Linien durchlaufen, und daß der Knoten A die Linie Aa beschreibe. Dieses vorausgesetzet, so trift alles wie im vorigen Paragraph ein, nur daß die Linien δA und δa, βA nnd βa, λA und λa, φA und φa, wie im 26sten Paragraph, auch bei einer endlichen Bewegung, sich selbst parallel bleiben. Und dann ist wiederum

$$K.\ Ak + P.\ Ap = Q.\ Aq + S.\ As$$

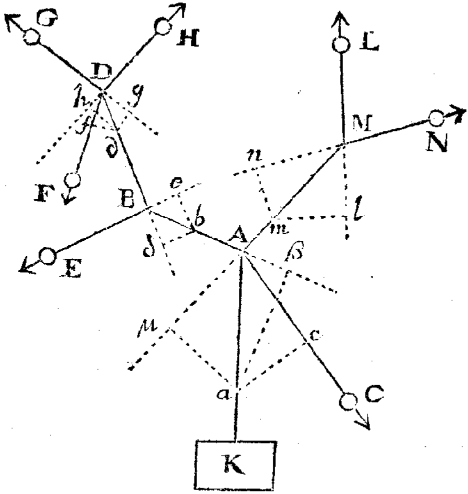
das heißt, die entgegengesetzten Energien sind gleich.

§. 29.

Es werde ein beliebiges Gewicht K von so viel Stricken als man will in Gleichgewicht gehalten, an welchen ver-

(Siehe die folgende Figur.)

schie-



schiedene Kräfte C, E, F, G, H, L, N ziehen. Die Stricke vereinigen sich in verschiedenen Knoten A, B, D, M.

Auf der Richtung AK nehme man nach Belieben den Theil Aa, und aus a fälle man auf die (nöthigenfalls verlängerten) Richtungen der Stricke die sich in A vereinigen die senkrechten Linien ac, $a\beta$, $a\mu$.

Auf dem Stricke AB nehme man den Theil Bb $=$ Aβ und aus b fälle man die senkrechten Linien be, $b\delta$ auf die Richtungen der Stricke die sich in B vereinigen.

Auf BD nehme man Theil Dd $=$ Bδ, und aus d fälle man die senkrechten Linien df, dh, dg auf die Richtungen der Stricke die sich in D vereinigen.

Auf dem Stricke AM, nehme man den Theil Mm $=$ Aμ, und aus m fälle man die Linien ml, mn senkrecht auf die Richtungen der Stricke die sich in M vereinigen.

Nun

Nun laßt uns die Spannungen der Stricke AB, BD, AM mit B, D, M bezeichnen, so daß, zum Exempel, B eine Kraft anzeige, welche in B das Strick AB eben so ziehen oder spannen würde, als es wirklich gezogen oder gespannet ist.

Alles dieses vorausgesetzet, so haben wir, vermöge der in den vorigen Paragraphen enthaltenen Beweise

$$\text{I)}\ K.\,Aa + C.\,Ac = B.\,A\beta + M.\,A\mu$$

Ferner

$$B.\,Bb = E.\,Be + D.\,B\delta$$

oder, weil gemacht worden

$Bb = A\beta$ und $B\delta = Dd$, so ist

$$\text{II)}\ B.\,A\beta = E.\,Be + D.\,Dd$$

Ferner ist

$$D.\,Dd + F.\,Df = G.\,Dg + H.\,Dh$$
$$D.\,Dd = G.\,Dg + H.\,dh - F.\,Df$$

Diesen Werth von $D.\,Dd$ setze man in die Gleichung N° II, so kömmt

$$\text{III)}\ B.\,A\beta = E.\,Be + G.\,Dg + H.\,Dh - F.\,Df$$

Ferner ist

$$M.\,Mm = L.\,Ml + N.\,Mn$$

oder, weil gemachet worden $Mm = A\mu$, so ist

$$\text{IV)}\ M.\,A\mu = L.\,Ml + N.\,Mn$$

Aus der dritten und vierten Gleichung nehme man die Werthe von $B.\,A\beta$ und $M.\,A\mu$. Man substituire sie in die erste Gleichung, so bekömmt man

$$K.\,Aa + C.\,Ac = E.\,Be + G.\,Dg + H.\,Dh - F.\,Df + L.\,Ml + N.\,Mn$$

oder

oder

$$K.Aa + C.Ac + F.Df = E.Be + G.Dg + H.Dh + L.Ml + N.Mn$$

Nun stelle man sich vor, das ganze System werde in allen seinen Punkten in einer mit AK parallelen Richtung beweget, so daß der Punkt A einen gewissen Theil Aa der Richtung AK durchlaufe. Dieses vorausgesezet, so ist Aa die energische Geschwindigkeit des Gewichtes K; $A\beta$ oder Bb ist die energische Geschwindigkeit der Kraft B, welche aus der Zusammenwirkung der Kräfte E, F, G, H entstehet. Folglich ist Be die energische Geschwindigkeit der Kraft E. Desgleichen ist $B\delta$ oder Dd die energische Geschwindigkeit der Kraft D, die aus den Kräften F, G und H entstehet. Dem zu Folge sind auch Df, Dg, Dh die energischen Geschwindigkeiten der Kräfte F, G, H.

Eben so ist $A\mu$ oder Mm die energische Geschwindigkeit der aus L und N zusammengesezten Kraft M. Deswegen sind Ml und Mn die energischen Geschwindigkeiten der Kräfte L und N.

Bei der sinkenden Bewegung des Systemes gehen die Kräfte K, C und F in ihren eigenen Richtungen vorwärts um Aa, Ac und Df. Folglich ist

$$K.\ Aa + C.Ac + F.Df$$

die Summe der positiven Energien. Bei der nämlichen Bewegung gehen die übrigen Kräfte E um Be, G um Dg, H um Dh, L um Ml, N um Mn ihren Richtungen zuwider rückwärts. Also ist

$$E.Be + G.Dg + H.Dh + L.Ll + N.Mn$$

die Summe der negativen Energien. Es ist aber jezt bewiesen, daß diese Summe der vorigen gleich ist. Folglich sind auch im gegenwärtigen Falle die Summen der entgegengesezten Energien gleich.

Achtes

Achtes Hauptstück.

Fernere Untersuchung der Schwerpunkte.

§. 1.

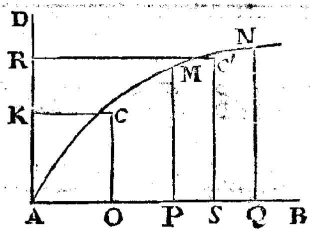
Wir haben schon im 5ten Hauptstücke gelehret, wie die Schwerpunkte der bekanntesten Linien, Flächen und Körper gefunden werden, und was dort gesaget worden, kann für den Anfänger hinlänglich sein. Hingegen, wer etwas weiter in der Mathematik fortgehen will, muß sich mit allgemeineren Methoden bekannt machen, die nicht nur in einzelnen Fällen, sondern in allen Fällen ähnlicher Art anwendbar sind. Solche Methoden giebt uns die Differenzial- und Integral-Rechnung an die Hand, um die Schwerpunkte zu bestimmen. Wer also in diesen höheren Rechnungsarten etwas bewandert ist, kann das gegenwärtige Hauptstück mit Nutzen lesen; wer aber noch nicht so weit gekommen ist, der muß sich mit demjenigen begnügen, was am angeführten Orte vorgetragen worden.

§. 2.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Bogens einer krummen Linie finden.

(Siehe die folgende Figur.)



Vorbereitung.

Es seien AB und AD die beiden Richtlinien der krummen Linie AN, nämlich AB für die Abzissen und AD für die Applikaten. Wir nehmen an, daß der Koordinaten-Winkel ein rechter sei. Nun sei C der verlangte Schwerpunkt des Bogens AM. Es ist leicht einzusehen, daß dieser Schwerpunkt meistens außerhalb der Linie selbst fallen wird; da man sich dann vorstellen muß, der Punkt C werde mit dem Bogen AM durch steife Linien verbunden, diese Linien seien ohne Schwere, und der Bogen allein sei schwer. Wird nun der Punkt C gestützet, so muß der Bogen in jeder Lage in Gleichgewicht bleiben, ohne sich im geringsten um den Punkt C zu drehen. Dieses ist der wahre Begriff, den man sich vom Schwerpunkte einer krummen Linie, oder eines Theiles derselben, machen muß; und ich führe ihn an, weil die Anfänger oft dabei etwas in Verlegenheit gerathen, da sie sich nicht leicht den Schwerpunkt als in der Luft schwebend vorstellen können.

Aus dem angenommenen Schwerpunkte C ziehe man CK mit AB und CO mit AD parallel. Man stelle sich ferner vor, der Bogen AM nehme zu um MN, so hat auch der Zusatz MN seinen Schwerpunkt C'. Aus diesem ziehe man wiederum C'R mit AB und C'S mit AD parallel.

 Da

Da C der Schwerpunkt des Bogens AM ist, so ist AM. CK das Moment des Bogens AM in Betrachtung der Richtlinie AD. Nämlich, wenn man sich die ganze Figur als eine horizontale Ebne vorstellet, worin AM allein schwer ist, und die sich um die Linie AD herumdrehen kann, so stellet AM. CK die Wirkung der Schwere des Bogens AM zur Umdrehung der Ebne vor. Unter AM wird hier eigentlich das Gewicht des Bogens verstanden, welches mit der Länge desselben proporzioniret ist, da man sich den Bogen als eine unendlich dünne Linie, mit Schwere, und durchaus homogen, vorstellet. Nun wird man leicht begreifen, daß in der nämlichen Bedeutung AM. CO das Moment des Bogens AM in Betreff der anderen Richtlinie AB ist.

Nimmt der Bogen zu um MN, so nimmt dessen Moment auch zu, in Betreff der AD um MN. C'R, und in Betreff der AB um MN. C'S. Denn das Moment zweier zusammengesezten oder auch abgesonderten Gewichte wie AM und MN ist der Summe der Momente beider Stücke gleich. Das Moment von AM + MN oder von AN ist demnach in Betreff der AD so groß als AM. CK + MN. C'R. Das Moment von AM allein war aber AM. CK. Also, indem der Bogen um MN zunimmt, so nimmt dessen Moment zu um MN. C'R. Eben so wird man leicht einsehen, daß, in Betreff der Richtlinie AB, das Moment des Bogens AM um MN. C'S zunimmt.

Wenn nun, wie gewöhnlich, die Zunahmen der Größen durch Δ ausgedrücket werden, so ist

$$\Delta(AM.\,CK) = MN.\,C'R$$

und $$\Delta(AM.\,CO) = MN.\,C'S$$

und da MN nichts anders als die Zunahme des Bogens AM ist, und durch ΔAM ausgedrücket werden kann, so hat man

$$\Delta(\text{AM}.\text{CK}) = \Delta\text{AM}.\text{C}'\text{R}$$
$$\Delta(\text{AM}.\text{CO}) = \Delta\text{AM}.\text{C}'\text{S}$$

Laßt uns den Bogen AM mit s, die Abzisse AP mit x und die Applikate PM mit y bezeichnen, und die Gränzen beider Gleichungen nehmen. Wenn wir uns demnach vorstellen, die Applikate QN trete zurück und nähere sich ins Unendliche der PM, so werden anstatt der vollständigen Differenzen die unvollständigen oder mit ∂ bezeichneten genommen. Zugleich nähert sich C'R oder SA dem Werthe AP oder x, und C'S nähert sich dem Werthe PM oder y. Uebrigens bleibet AM$=s$; und dann hat man folgende

Auflösung.

$$\partial(s.\text{CK}) = x\,\partial s$$
$$\partial(s.\text{CO}) = y\,\partial s$$

Für jede gegebene Linie müssen nun ∂s und s in Funkzionen von x und y ausgedrücket werden; so werden sich die Werthe von CK und CO ergeben.

Exempel I. Es sei AM ein Zirkelbogen, AB sei ein Theil des Diameters, und AD senkrecht auf demselben. Es sei r der Halbmesser, und folglich $2r$ der Durchmesser, so giebt die Gleichung des Zirkels vom Scheitel aus

$$y^2 = 2rx - x^2$$

oder $$y = \sqrt{(2rx - x^2)} = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Fer-

Ferner ist bekanntermaßen allemal $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Differenziret man $y = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$, so kömmt

$$\partial y = \tfrac{1}{2}(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}(2r\partial x - 2x\partial x)$$

oder $\partial y = (2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}(r - x)\partial x$

oder $\partial y = \dfrac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}\partial x$

also $\partial y^2 = \dfrac{r^2 - 2rx + x^2}{2rx - x^2}.\partial x^2$

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2 + \frac{r^2 - 2rx + x^2}{2rx - x^2}.\partial x^2$$

$$= \left(1 + \frac{r^2 - 2rx + x^2}{2rx - x^2}\right).\partial x^2$$

$$= \frac{2rx - x^2 + r^2 - 2rx + x^2}{2rx - x^2}.\partial x^2$$

$$= \frac{r^2}{2rx - x^2}\cdot\partial x^2$$

Also $\quad \partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \dfrac{r\partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$

Diesen Werth von ∂s setze man in die Formel

$$\partial(s.\,\mathrm{CK}) = x\partial s$$

so ist $\quad \partial(s.\,\mathrm{CK}) = \dfrac{rx\partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$

Nun kömmt es darauf an, $\dfrac{rx\partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ zu integriren. Wäre das x nicht im Zähler, so hätte man das bloße

bloße Differenzial des Bogens s. Folglich wäre s selbst das Integral. Man versuche demnach, die zu integrirende Formel also zu schreiben:

$$\frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} - \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} + \frac{rx\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

oder $\dfrac{r^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} - \dfrac{r^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} + \dfrac{rx\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$

oder $\dfrac{r^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} - \dfrac{(r^2-rx)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$

oder $r.\dfrac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} - r.\dfrac{(r-x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$

oder $r\,\mathrm{d}s - r\,\mathrm{d}y$

so ist $\mathrm{d}(s\,\mathrm{CK}) = r\,\mathrm{d}s - r\,\mathrm{d}y$

folglich, wenn man integriret,

$$s.\mathrm{CK} = rs - ry$$

also $\mathrm{CK} = r - \dfrac{ry}{s}$

Ferner ist

$$\mathrm{d}(s.\mathrm{CO}) = y\,\mathrm{d}s$$

$$\ldots = y\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}$$

$$\ldots = \sqrt{(2rx-x^2)}.\frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

$$\mathrm{d}(s.\mathrm{CO}) = r\,\mathrm{d}x$$

folglich, wenn man integriret,

$$s.\mathrm{CO} = rx$$

$$\mathrm{CO} = \frac{rx}{s}$$

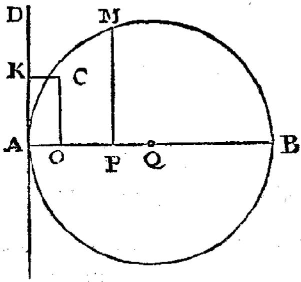
Die

Die beiden gefundenen Linien, nämlich

$$CK = r - \frac{ry}{s}$$

und $$CO = \frac{rx}{s}$$

geben uns ein leichtes Mittel an die Hand, um den Schwerpunkt eines Zirkelbogens wie AM zu finden, der durch zwei Koordinaten AP und PM bestimmet wird.



Durch das eine Ende A des Bogens gehet der Durchmesser AB. Auf demselben stelle man AD senkrecht. Da

$$CK = r - \frac{ry}{s}$$

oder $$AO = r - \frac{ry}{s}$$

so ist $$QO = AQ - AO$$

$$\ldots = r - AO$$

$$\ldots = r - \left(r - \frac{ry}{s}\right)$$

$$QO = \frac{ry}{s}$$

oder

oder $s, y :: r, QO$

oder $AM, PM :: AQ, QO$

Der Bogen verhält sich demnach zu seinem Sinus, oder zu seiner Applikate, wie sich der Halbmesser verhält zu QO. Nachdem durch diese Proporzion der Punkt C bestimmet worden, so wird aus demselben eine Linie OC auf AQ senkrecht errichtet. Ferner, da

$$CO = \frac{rx}{s}$$

oder $$AK = \frac{rx}{s}$$

so ist $s, x :: r, AK$

oder $AM, AP :: AQ, AK$

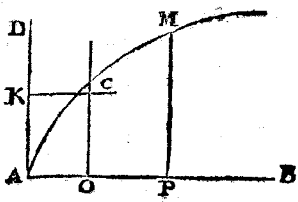
also verhält sich der Bogen zu seiner Abzisse oder zu seinem Sinusversus wie der Halbmesser zu AK. Nachdem der Punkt K durch diese Proporzion gefunden worden, so wird KC mit AQ parallel, oder auf AD senkrecht gezogen.

Wo nun die Linien KC und OC einander schneiden, da ist der Schwerpunkt des Bogens AM.

Man merke übrigens, daß die beständige Größe, die beim Integriren zugesetzet werden sollte, weggelassen worden, weil vorausgesetzet wird, daß die Momente $s.CK$ und $s.CO$ null werden, wenn x, y und s null werden, da dann die willkürliche beständige Größe auch im gegenwärtigen Falle null wird, wie es denen bekannt ist, welche die Anfangsgründe der Integral-Rechnung gelernet haben.

Exem-

Exempel II.



Es gehöre der Bogen AM zu einer gemeinen Parabel, so ist die Gleichung dieser krummen Linie

$$y^2 = px$$

oder $$y = \sqrt{px}$$

oder $$y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

daher $$\partial y = \tfrac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \partial x$$

oder $$\partial y = \frac{\partial x \sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$$

$$\partial y^2 = \frac{p}{4x} . \partial x^2$$

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2 + \frac{p}{4x} \partial x^2$$

$$\ldots\ldots = \left(1 + \frac{p}{4x}\right) \partial x^2$$

$$\ldots\ldots = \frac{4x + p}{4x} \partial x^2$$

$$\ldots\ldots = \frac{4px + p^2}{4px} \partial x^2$$

$$\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial x . \frac{\sqrt{(4px + p^2)}}{2\sqrt{(px)}}$$

Folglich

$$\partial(s.\,\mathrm{CK}) = x\,\partial s$$
$$\quad\ldots = x\,\partial x.\,\frac{\sqrt{(4px+p^2)}}{2\sqrt{(px)}}$$

Um diese lezte Formel zu integriren, setze man, es sei

$$x\,\partial x.\,\frac{\sqrt{(4px+p^2)}}{2\sqrt{(px)}} = \mathrm{A}\,\partial s + \partial \mathrm{X}$$

oder

$$x\,\partial x.\,\frac{\sqrt{(4px+p^2)}}{2\sqrt{(px)}} = \mathrm{A}.\,\partial x.\,\frac{\sqrt{(4px+p^2)}}{2\sqrt{(px)}} + \partial \mathrm{X}$$

so ist $\quad \partial \mathrm{X} = (x-\mathrm{A})\,\partial x\,\dfrac{\sqrt{(4px+p^2)}}{2\sqrt{(px)}}$

Hier bedeutet A eine beständige Größe, die noch zu bestimmen ist, und X ist eine noch unbekannte Funkzion von x. Nun nehme man an, diese unbekannte Funkzion bekomme folgende Gestalt

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}\,(4px+p^2)^m\,(px)^n$$

wo B, m und n wiederum beständige und noch zu bestimmende Größen sind. Differenziret man, so kömmt

$$\partial \mathrm{X} = m\mathrm{B}\,(4px+p^2)^{m-1}(4p\,\partial x)(px)^n$$
$$+ n\mathrm{B}\,(px)^{n-1}(p\,\partial x)(4px+p^2)^m$$

oder, wegen des vorher angenommenen Werthes von ∂X,

$$\frac{(x-\mathrm{A})\,(4px+p^2)^{\frac{1}{2}}\,\partial x}{2\,(px)^{\frac{1}{2}}} = m\mathrm{B}\,(4px+p^2)^{m-1}\,(4p\,\partial x)\,(px)^n + n\mathrm{B}\,(px)^{n-1}\,(p\,\partial x)\,(4px+p^2)^m$$

Man

Man multiplizire beide Glieder der Gleichung mit $(px)^{\frac{1}{2}}$, und dividire beiderseits durch $(4px+p^2)^{\frac{1}{2}}\,\partial x$, so entstehet

$$\frac{x-A}{2}=4mpB(4px+p^2)^{m-\frac{3}{2}}(px)^{n+\frac{1}{2}}$$
$$+npB(4px+p^2)^{m-\frac{1}{2}}(px)^{n-\frac{1}{2}}$$

Da nun, der Voraussetzung zufolge, beide Glieder der Gleichung identisch oder einerlei sein sollen, so muß im zweiten Gliede, wie im ersten, keine andere Potenz des x vorkommen als die erste. Dieses wird geschehen, wenn man annimmt $m=\frac{3}{2}$ und $n=\frac{1}{2}$. In diesem Falle ist $m-\frac{3}{2}=0$, $n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, $m-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$, und $n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. Erinnert man sich nun, daß jede zu null erhobene Größe $=1$ wird, so hat man

$$\frac{x-A}{2}=4.\tfrac{3}{2}pB(px)+\tfrac{1}{2}pB(4px+p^2)$$
$$\ldots\ldots=6p^2Bx+2p^2Bx+\tfrac{1}{2}p^3B$$
$$\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}A=8p^2Bx+\tfrac{1}{2}p^3B$$
$$1.x-A=16p^2Bx+p^3B$$

Nun erfordert die Identität, daß

$$1x=16p^2Bx$$

oder $$1=16p^2B$$

daher $$B=\frac{1}{16p^2}$$

ferner,

ferner, daß $-A = p^3 B$

$$-A = p^3 . \frac{1}{16p^2}$$

$$-A = \frac{p}{16}$$

$$A = -\frac{p}{16}$$

Nun wurde gleich anfänglich angenommen,

$$\partial\,(s . CK) = x\,\partial s$$

$$\ldots = x\,\partial x \frac{\sqrt{(4px-p^2)}}{2\sqrt{(px)}}$$

$$\ldots = A\,\partial s + \partial X$$

folglich, wenn man integriret

$$s . CK = As + X$$

$$\ldots = As + B\,(4px+p^2)^m (px)^n$$

$$\ldots = -\frac{p}{16}s + \frac{1}{16p^2}(4px+p^2)^{\frac{3}{2}}(px)^{\frac{1}{2}}$$

$$s . CK = \frac{\sqrt{(4px+p^2)}^3}{16p^2}\sqrt{(px)} - \frac{ps}{16}$$

also $$CK = \frac{\sqrt{(px)} . \sqrt{(4px+p^2)}^3}{16p^2 s} - \frac{p}{16}$$

Die willkührliche beständige Größe wird, wie beim Zirkelbogen, null.

Da

Da nun CK gefunden, so bleibet übrig CO zu bestimmen. Es ist

$$\mathrm{d}\,(s.\,\mathrm{CO}) = y\,\mathrm{d}\,s$$

$$\ldots = \mathrm{d}s.\ \sqrt{(px)}$$

$$\ldots = \mathrm{d}x.\frac{\sqrt{(4px+p^2)}}{2\sqrt{px}}.\sqrt{(px)}$$

$$\ldots = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x\sqrt{(4px+p^2)}$$

$$\ldots = \tfrac{1}{2}\ \frac{(4px+p^2)^{\frac{1}{2}}(4p\,\mathrm{d}x)}{4p}$$

$$\mathrm{d}\,(s.\,\mathrm{CO}) = \frac{1}{8p}\ (4px+p^2)^{\frac{1}{2}}.\mathrm{d}(4px+p^2)$$

Da nun hier eine Potenz von $(4px+p^2)$ mit den Diffeziale derselbigen Größe multipliziret ist, so wird nach den gewöhnlichen Regeln integriret, nämlich man bekömmt

$$s.\,\mathrm{CO} = \frac{1}{8p}.\frac{(4px+p^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$s.\,\mathrm{CO} = \frac{1}{8p}.\frac{(4px+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$s.\,\mathrm{CO} = \frac{1}{12p}\,(apx+p^2)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{K}$$

Hier ist K die beim Integriren zuzusetzende beständige Größe. Es werde $x = o$, so wird der Bogen s und folglich dessen Moment null. Also ist

$$o = \frac{1}{12p}(o + p^2)^{\frac{3}{2}} + K$$

$$o = \frac{1}{12p}(p^2)^{\frac{3}{2}} + K$$

$$o = \frac{p^3}{12p} + K$$

$$K = -\frac{p^3}{12p}$$

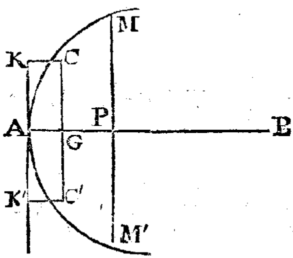
folglich

$$s . CO = \frac{(apx + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3}{12p}$$

$$CO = \frac{(apx + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3}{12ps}$$

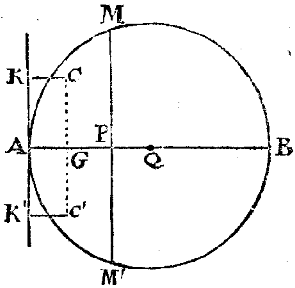
Zusatz

Wenn der Bogen symmetrisch ist, das heißt, wenn er aus zwei ähnlichgleichen Theilen bestehet, so wird die Rechnung um die Hälfte verkurzet.



Gesezt

Gesetzt der Bogen MAM′ (vor. Fig.) sowohl als der Raum MAM′M werde durch die Axe AB in zwei ähnliche gleiche Theile getheilet. Es sei C der Schwerpunkt des Theiles AM und C′ der Schwerpunkt des Theiles AM′, so wird CK = C′K′. Der gemeinsame Schwerpunkt beider Theile, und folglich der Schwerpunkt des ganzen Bogens MAM′ wird in der Mitte der CC′ nämlich in G zu liegen kommen, und es wird sein GA = CK, alles wegen der vollkommenen Symmetrie der Figur. Also brauchet man nur CK zu berechnen, und deren Länge von A nach G auf die Axe zu tragen; so ist der Schwerpunkt G des Bogens MAM′ bestimmet.



Beim Zirkel war $CK = AG = r - \frac{ry}{s}$, und die Entfernung QG wurde durch diese Proporzion bestimmet

$$s, y :: r, QG$$

oder $AM, PM :: AQ, QG$

Der Punkt G, welcher durch diese Proporzion bestimmet wird, ist demnach der Schwerpunkt des Bogens MAM′. Man verdoppele die beiden ersten Sätze der Proporzion, so kömmt

$$2AM, 2PM :: AQ, QG$$

oder $MAM', MM' :: AQ, QG$

das

das heißt: die Länge des Bogens verhält sich zu seiner Sehne, wie der Halbmesser zum Abstande zwischen dem Mittelpunkte des Zirkels und dem Schwerpunkte des Bogens. Dieses stimmet völlig mit demjenigen überein, was schon aus anderen Gründen bekannt ist (V H. § 32).

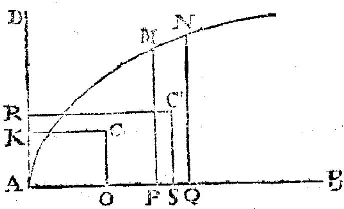
Wäre MAM' ein parabolischer Bogen und AQ ein Theil der Axe, so wäre

$$AG = CK = \frac{\sqrt{(px)}\cdot\sqrt{(4px+p^2)}^3}{16p^2 s} - \frac{p}{16}$$

und so wäre der Schwerpunkt G des ganzen parabolischen Bogens MAM' bestimmet.

§. 3.

Aufgabe.



Es soll der Schwerpunkt C der Ebne AMP bestimmet werden, welche zwischen dem Bogen AM und beiden zustimmenden Koordinaten AP und PM lieget.

Gesezt der Raum AMP, welchen wir F nennen wollen, nehme zu um den Theil PMNQP, so ist PMNQP $= \Delta$ E.

$= \Delta E$. Es sei C' der Schwerpunkt dieses hinzukommenden Theiles.

Das Moment des Raumes E ist $E.CK$ in Betreff der Axe AD. Das Moment des angesezten Theiles ΔE ist $\Delta E.C'R$, und dieses leztere Moment ist die Zunahme des ersteren. Also ist $\Delta(E.CK) = \Delta E.C'R$.

Aus den nämlichen Betrachtungen erhellet, in Betreff der Axe AB, daß $\Delta(E.CO) = \Delta E.C'S$.

Nun stelle man sich vor, daß die Applikate QN sich der PM ohne Ende nähert, so nähert sich der Punkt C' der Linie PM, folglich nähert sich $C'R$ oder AS dem Werthe AP oder x. Zugleich nähert sich das Stück PMNQP der Größe eines Parallelogramms, dessen Schwerpunkt C' in der Mitte der Höhe PM lieget, so daß $\frac{1}{2}$ PM oder $\frac{1}{2}y$ die Gränze der $C'S$ ist. Nimmt man demnach die Gränzen beider gefundenen Gleichungen, so ist

$$\partial(E.CK) = x.\partial E$$

$$\partial(E.CO) = \tfrac{1}{2}y.\partial E$$

Exempel I. Es sei wiederum der Raum APM ein Stück eines Zirkels, dessen Halbmesser $= r$ ist. Es ist aus der Geometrie bekannt, daß $\partial E = y\,\partial x$, oder da im Zirkel $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$, so ist

$$\partial E = \partial x \sqrt{(2rx - x^2)}$$

$$\partial(E.CK) = x\partial E = x\partial x \sqrt{(2rx - x^2)}$$

$$\quad . \quad . \quad . \quad = r\partial x\sqrt{(2rx-x^2)} - r\partial x\sqrt{(2rx-x^2)} + x\partial x\sqrt{(2rx-x^2)}$$

$$\partial(E.CK) = r\partial x\sqrt{(2rx-x^2)} - (r-x)\partial x\sqrt{(2rx-x^2)}$$

Hier ist $r\,\mathrm{d}x\sqrt{(2rx-x^2)}$ nichts anders als $r\,\mathrm{d}\,\mathrm{E}$, folglich ist das Integral $r\mathrm{E}$. Ferner muß integriret werden $(r-x)\,\mathrm{d}x(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}(2r\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}.\,\mathrm{d}(2rx-x^2)$. Da hier die Potenz der veränderlichen Größe mit ihrem eigenen Differenziale multipliziret ist, so ist das Integral leicht zu finden, nämlich man bekömmt $\frac{1}{2}\frac{(2rx-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2rx-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(2rx-x^2)^3} = \frac{1}{3}y^3$. Folglich wird das Integral der Gleichung

$$\mathrm{E.\,CK} = r\mathrm{E} - \tfrac{1}{3}y^3$$

und $$\mathrm{CK} = r - \frac{y^3}{3\mathrm{E}}$$

Ferner muß CO bestimmet werden. Es ist aber

$$\mathrm{d}(\mathrm{E.\,CO}) = \tfrac{1}{2}y\,\mathrm{d}\,\mathrm{E}$$
$$\ldots = \tfrac{1}{2}y.y\,\mathrm{d}x$$
$$\ldots = \tfrac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}x$$
$$\ldots = \tfrac{1}{2}(2rx-x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\mathrm{E.\,CO}) = rx - \tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x$$

folglich $$\mathrm{E.\,CO} = \tfrac{1}{2}rx^2 - \tfrac{1}{6}x^3$$

also $$\mathrm{CO} = \frac{3rx^2 - x^3}{6\mathrm{E}}$$

oder $$\mathrm{CO} = \frac{(3r-x)x^2}{6\mathrm{E}}$$

welches diese Proporzion giebt

$$6\mathrm{E},\ x^2 :: (3r-x),\ \mathrm{CO}$$

Es

Es sollte eigentlich eine beständige Größe zum Werthe von CO zugesetzet werden, sie verschwindet aber, weil $x = o$ auch das Moment $= o$ giebt.

Exempel II. Es sei die krumme Linie eine gemeine Parabel, so ist

$$\partial(\mathrm{E.CK}) = x.\partial\mathrm{E}$$
$$\ldots\ldots = x.y\partial x$$
$$\ldots\ldots = x\partial x.\sqrt{(px)}$$
$$\ldots\ldots = x\partial x.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$
$$\ldots\ldots = p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}\partial x$$

folglich $\mathrm{E.CK} = \frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$

$$\mathrm{CK} = \frac{\frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{E}}$$

Es ist aber in der Parabel $\mathrm{E} = \int(y\partial x) = \int(p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\partial x) = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, also

$$\mathrm{CK} = \frac{\frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}$$

oder $\mathrm{CK} = \frac{3}{5}x$

Ferner ist

$$\partial(\mathrm{E.CO}) = \tfrac{1}{2}y.\partial\mathrm{E}$$
$$\ldots = \tfrac{1}{2}y.y\partial x$$
$$\ldots = \tfrac{1}{2}y^2\partial x$$
$$\ldots = \tfrac{1}{2}px\partial x$$

$$\text{folglich} \quad E.CO = \tfrac{1}{4}px^2$$

$$CO = \frac{\tfrac{1}{4}px^2}{E}$$

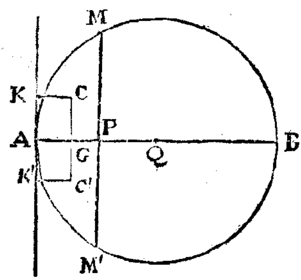
$$\cdot\cdot = \frac{\tfrac{1}{4}px^2}{\tfrac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cdot\cdot = \tfrac{3}{8}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\cdot = \tfrac{3}{8}\sqrt{(px)}$$

$$\cdot\cdot = \tfrac{3}{8}y$$

Zusatz. Wenn der Raum, dessen Schwerpunkt man suchet, von der Axe halbiret wird, so brauchet man nur die Entfernung CK zu suchen, welches eben so bewiesen wird, wie im Zusatze des vorigen Paragraphs.



Es werde der Schwerpunkt des Zirkel-Abschnittes MAM'M verlanget, so lieget derselbe in der Axe AB, die den Bogen und den Abschnitt halbiret, und die Entfernung GA ist den Entfernungen CK und C'K', wie am be-
mel-

meldeten Orte, gleich. Es wurde aber kurz vorher für den Zirkel gefunden

$$CK = r - \frac{y^3}{3E}$$

also $$GA = r - \frac{y^3}{3E}$$

Von r oder AQ muß demnach abgenommen werden

$$QG = \frac{y^3}{3E}$$

$$QG = \frac{y^2 \cdot y}{3E}$$

Dieses giebt folgende Proporzion

$$3E, y^2 :: y, QG$$

also auch $$3(2E), y^2 :: 2y, QG$$

oder $$3(MAM'M), (PM)^2 :: M'M, QG$$

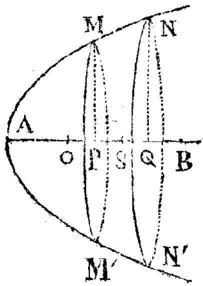
das heißt: der dreifache Flächen-Inhalt des Abschnittes verhält sich zum Quadrate der halben Sehne, wie sich die ganze Sehne verhält zur Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte.

Nimmt man den Raum MAM'M für parabolisch an, so wurde gefunden $CK = AG = \frac{3}{5}x$, so daß, wenn man die Abzisse AP in fünf gleiche Theile theilet, der Schwerpunkt G allemal am Ende des dritten Theiles, vom Scheitel an gerechnet, lieget.

§. 4.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt der krummen Fläche finden, welche entstehet, wenn eine krumme Linie sich um ihre Axe oder Richtline herum drehet.



Es sei MAM′ die Kappe, welche der Bogen AM beschreibet, wenn er sich um die Axe AB herumdrehet, so ist klar genug, daß der Schwerpunkt O dieser Kappe in der Axe AB lieget. Denn in derselben liegen alle Schwerpunkte der Gürtel, welche die Theilchen des Bogens AM beschreiben. Es nehme die Abzisse AP zu um PQ, so nimmt der Bogen AM zu um MN, und die Kappe nimmt zu um den Gürtel MM′N′N. Der Schwerpunkt dieses Gürtels ist ebenfalls, und aus dem nämlichen Grunde, in der Axe AB. Er sei z. E. in S. Es sei F die Größe der Kappe MAM′, so ist in Betreff des Punktes A das Moment derselben F. AO. Der Gürtel MM′N′N ist $= \Delta F$, und das Moment desselben ist $\Delta F. AS$. Dieses Moment ist die Zunahme des vorigen. Also ist

$$\Delta (F.AO) = \Delta S.\ AS$$

Gehet

Gehet nun die Applikate QN zurück, so daß sie sich der PM je mehr und mehr nähert, so nähert sich AS dem Werthe der AP, welche mit x angedeutet zu werden pfleget. Wenn man also die Gränzen nimmt, so ist

$$\partial(\text{F.AO}) = x.\partial\text{F}$$

und diese Gleichung muß integriret werden, wenn man AO bestimmen will.

Exempel I. Es sei AM ein Zirkelbogen, und folglich die Kappe MAM′ ein Theil einer Kugelfläche. Es ist bekannt, daß überhaupt

$$\partial\text{F} = 2\pi y\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$$

wenn nämlich der Halbmesser jedes Zirkels sich zur halben Peripherie, oder der Durchmesser zur ganzen Peripherie verhält, wie 1 zu π. Für den Zirkel dessen Halbmesser $= r$ findet man wie in § 2, $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ $= \dfrac{r\partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \dfrac{r\partial x}{y}$. Folglich ist

$$\partial\text{F} = 2\pi y.\frac{r\partial x}{y} = 2\pi r\partial x$$

und $\quad\text{F} = 2\pi r x$

Da nun $\partial(\text{F.AO}) = x.\partial\text{F}$

so ist $\quad\partial(\text{F.AO}) = 2\pi r x\partial x$

$$\text{F.AO} = \pi r x^2 + \text{C (verschwindet)}$$

$$\text{AO} = \frac{\pi r x^2}{\text{F}} = \frac{\pi r x^2}{2\pi r x} = \tfrac{1}{2}x$$

so daß der Schwerpunkt einer jeden Kugelkappe in der Mitte der zustimmenden Abzisse lieget; so wird zum Exempel der Schwerpunkt der Oberfläche einer halben Kugel in der Mitte des Halbmessers liegen.

Exempel II. In der gemeinen Parabel ist $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ $= \frac{\partial x . \sqrt{(4px + p^2)}}{2\sqrt{(px)}} = \frac{\partial x \sqrt{(4px + p^2)}}{2y}$. (Siehe § 2, das zweite Exempel). Nun ist

$$\partial (F. AO) = x . \partial F$$

$$. \quad . \quad . \quad = x . 2\pi y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$$

$$. \quad . \quad . \quad = x . 2\pi y . \frac{\partial x . \sqrt{(4px + p^2)}}{2y}$$

$$. \quad . \quad . \quad = \pi x \partial x \sqrt{(4px + p^2)}$$

$$\partial (F. AO) = \pi x \partial x (4px + p^2)^{\frac{1}{2}}$$

Um diese Formel zu integriren, setze man

$$4px + p^2 = u$$

daher $$4px = u - p^2$$

$$x = \frac{u}{4p} - \frac{p}{4}$$

$$\partial x = \frac{\partial u}{4p}$$

Folg=

Folglich wird

$$\partial\,(F.\,AO) = \pi.\left(\frac{u}{4p} - \frac{p}{4}\right)\frac{du}{4p}.\,u^{\frac{1}{2}}$$

$$\partial(F.\,AO) = \frac{\pi\,u^{\frac{3}{2}}\,\partial u}{16\,p^2} - \frac{\pi\,u^{\frac{1}{2}}\,\partial u}{16}$$

$$F.\,AO = \frac{\frac{2}{5}\pi\,u^{\frac{5}{2}}}{16p^2} - \frac{\frac{2}{3}\,\pi\,u^{\frac{3}{2}}}{16} + C$$

$$F.\,AO = \frac{\pi\,u^{\frac{5}{2}}}{40p^2} - \frac{\pi\,u^{\frac{3}{2}}}{24} + C$$

$$F.\,AO = \frac{\pi}{40p^2}\,(4px + p^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{\pi}{24}(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Da das Moment null wird, wenn $x = o$, so ist

$$o = \frac{\pi}{40p^2}\,(p^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{\pi}{24}\,(p^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$o = \frac{\pi}{40p^2}\,p^5 - \frac{\pi}{24}p^3 + C$$

$$o = \frac{1}{40}\,\pi p^3 - \frac{1}{24}\,\pi p^3 + C$$

$$o = -\frac{1}{60}\,\pi\,p^3 + C$$

$$\frac{1}{60}\,\pi\,p^3 = C$$

Folglich

$$F.AO = \frac{1}{40} \cdot \frac{\pi}{p^2} \cdot (4px + p^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{24}\pi(4nx + p^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{1}{60}\pi p^3$$

$$\ldots = \frac{3}{120} \cdot \frac{\pi}{p^2}(4px + p^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{120}\pi(4px + p^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{1}{60}\pi p^3$$

$$\ldots = \left[\frac{3}{120}\frac{\pi}{p^2}(4px + p^2) - \frac{5}{120}\pi\right] \cdot (4px + p^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{1}{60}\pi p^3$$

$$\ldots = \left[\frac{3}{120} \cdot \frac{\pi}{p^2} \cdot 4px + \frac{3}{120} \cdot \frac{\pi}{p^2}p^2 - \frac{5}{120}\pi\right] \cdot (4px + p^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{1}{60}\pi p^3$$

$$\ldots = \left[\frac{12}{120} \cdot \frac{\pi x}{p} - \frac{2}{120}\pi\right] \cdot (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{60}\pi p^3$$

$$\ldots = \left(\frac{6}{60} \cdot \frac{\pi x}{p} - \frac{1}{60}\pi\right) \cdot (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{60}\pi p^3$$

$$\ldots = \frac{\pi}{60}\left(\frac{6x}{p} - 1\right)(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{60}\pi p^3$$

$$\ldots = \frac{\pi}{60}\left(\frac{6x - p}{p}\right)(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{60}\pi p^3$$

$$\ldots = \frac{\pi}{60p}(6x - p)(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{60}\pi p^3$$

$$F.AO = \frac{\pi}{60p^2}(6px - p^2)(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi p^3}{60}$$

$$AO = \frac{1}{F}\left[\frac{\pi}{60p^2}(6px - p^2)(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi p^3}{60}\right]$$

Da

Da nun $\partial F = 2\pi y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, und für die Parabel $\partial F = \pi \partial x \sqrt{(4px + p^2)} = \pi \partial x (4px + p^2)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{\pi}{4p} . (4px + p^2)^{\frac{1}{2}} . (4p \partial x) = \frac{\pi}{4p} (4px + p^2)^{\frac{1}{2}}$ $\partial (4px + p^2)$, so ist $F = \frac{\pi}{6p} (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + C$, und da $F = o$, wenn $x = o$, so ist $o = \frac{\pi}{6p} (p^2)^{\frac{3}{2}} + C$, oder $o = \frac{\pi}{6p} p^3 + C$ oder $o = \frac{\pi p^2}{6} + C$, oder $C = - \frac{\pi p^2}{6}$, folglich $F = \frac{\pi}{6p} (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi p^2}{6}$. Also ist

$$AO = \frac{\frac{\pi}{60 p^2} (6px - p^2)(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi p^3}{60}}{\frac{\pi}{6p} (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi p^2}{6}}$$

$$AO = \frac{\frac{1}{60 p^2} (6px - p^2)(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{p^3}{60}}{\frac{1}{6p} (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{6}}$$

$$AO = \frac{\frac{1}{p^2} (6px - p^2)(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} + p^3}{\frac{10}{p} (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} - 10 p^2}$$

Dieses ist demnach die Formel für die parabolische Kappe. Sie läßt sich nicht weiter verkürzen. Denn wenn

wenn man den Zähler durch den Nenner dividiret, so bleibet ein Bruch übrig.

§. 5.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Körpers zu finden, der durch die Umdrehung einer krummlinichten Ebne um ihre Axe entstehet.

In der vorigen Figur stelle man sich vor, die Ebne APM drehe sich um ihre Axe AB, so beschreibet sie den runden Körper MAM′. Nimmt die Abzisse AP um PQ zu, und folglich der Bogen AM um MN, so nimmt der Körper MAM′ zu um die Scheibe MM′N′N. Es sei Σ die Größe des Körvers und O sein Schwerpunkt, so ist in Betreff des Punktes A sein Moment $\Sigma.$ AO. Es sei S der Schwerpunkt der hinzukommenden Scheibe, so ist deren Moment $\Delta\Sigma.$ AS, und dieses ist die Zunahme des vorigen Moments. Also ist

$$\Delta(\Sigma.AO) = \Delta\Sigma.\ AS.$$

oder, wenn man die Gränzen, wie bei den vorigen Fällen nimmt,

$$\partial(\Sigma.\ AO) = x.\partial\Sigma$$

welche Gleichung in jedem besonderen Falle integriret werden muß.

Exempel I. Es sei die Linie AM ein Zirkelbogen, so ist der Körper ein Kugelabschnitt. Es ist überhaupt $\partial\Sigma = \pi y^2 \partial x$, und für den Zirkel $\partial\Sigma = \pi(2rx - x^2)$ $\partial x = \pi(2rx\partial x - x^2\partial x)$, folglich $\Sigma = \pi(rx^2 - \frac{1}{3}x^3)$. Weiter ist $x\partial\Sigma = \pi x(2rx - x^2)$ $\partial x = \pi(2rx^2\partial x - x^3\partial x)$. Also

$$\partial(\Sigma.\,AO) = \pi(2rx^2\partial x - x^3\partial x)$$

$$\Sigma.\,AO = \pi\left(\tfrac{2}{3}rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right) + C \text{ (versch.)}$$

$$AO = \frac{\pi\left(\frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4\right)}{\pi\left(rx^2 - \frac{1}{3}x^3\right)}$$

$$AO = \frac{\frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4}{rx^2 - \frac{1}{3}x^3}$$

$$AO = \frac{\frac{2}{3}rx - \frac{1}{4}x^2}{r - \frac{1}{3}x}$$

$$AO = \frac{2rx - \frac{3}{4}x^2}{3r - x}$$

$$AO = \frac{8rx - 3x^2}{12r - 4x}$$

$$AO = \frac{(8r - 3x)x}{12r - 4x}$$

Ist der Körper eine Halbkugel, so wird $x = r$, und dann bekömmt man

$$AO = \frac{(8r - 3r)r}{12r - 4r} = \frac{5r^2}{8r} = \frac{5}{8}r$$

Da nun $AO = \frac{5}{8}r$, so bleiben bis zum Mittelpunkte der Kugel $\frac{3}{8}r$, welches schon auf eine andere Art gefunden worden. (V H. §36).

Exempel II. Es sei der Körper ein parabolischer Afterkegel, so ist $y^2 = px$, folglich $\partial\Sigma = \pi y^2\,\partial x = \pi px\,\partial x$, daher $\Sigma = \frac{1}{2}\pi px^2$.

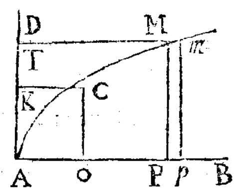
Nun

Nun ist

$$\partial(\Sigma . AO) = x . \partial \Sigma$$
$$. \quad . \quad . \quad = x . \pi p x \partial x$$
$$. \quad . \quad . \quad = \pi p x^2 \partial x$$
$$\Sigma . AO = \tfrac{1}{3} \pi p x^3 + C \text{ (verschw.)}$$
$$AO = \frac{\tfrac{1}{3} \pi p x^3}{\Sigma}$$
$$AO = \frac{\tfrac{1}{3} \pi p x^3}{\tfrac{1}{2} \pi p x^2}$$
$$AO = \tfrac{2}{3} x$$

§. 6.

Die gefundenen Formeln zur Erforschung der Schwerpunkte können alle auf eine, zwar nicht so einleuchtende, aber kürzere Art bewiesen werden, wenn man die unendlich kleinen Größen mit zur Hülfe nimmt. Auch diese Methode wollen wir hier vortragen, weil sie, wegen ihrer Kürze, dem Gedächtnisse zur Hülfe kommen kann.



I. Der Bogen AM nehme zu um den unendlich kleinen Theil Mm, welcher als eine gerade Linie betrachtet werden kann, so ist Mm.MT das Moment des Bogens Mm in Betreff der Axe AD. Denn wegen der unendlich kleinen

kleinen Länge des Bogens kann MT für die Entfernung seines Schwerpunktes von der Axe AD genommen werden. Folglich ist $Mm.MT$ oder $MT.Mm$ das Differenzial des Moments des Bogens AM. Es ist aber $MT = AP = x$, und $Mm = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Folglich ist $\int x \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ das Moment des Bogens AM in Betreff der Axe AD. Also ist $AM \times CK = \int x \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, folglich

$$CK = \frac{\int x \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{AM}$$

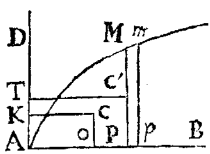
oder $$CK = \frac{\int x \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$$

Auf gleiche Art muß man betrachten, daß $AM \times CO$ zunimmt, um $Mm.MP$ oder um $MP.Mm$ oder um $y\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, so daß $AM \times CO = \int y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$

folglich $$CO = \frac{\int y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{AM}$$

oder $$CO = \frac{\int y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$$

Wenn jenseits der Axe AB noch ein Bogen wie AM lieget, wie oben (§ 2 Zus.) angenommen worden, so ist O der Schwerpunkt des ganzen Bogens, und es ist $AO = KC$. Folglich wird in diesem Falle AO durch die nämliche Formel gefunden, wie kurz vorher CK.



II. Es sei C der Schwerpunkt des krummlinichten Raumes APM, so ist dessen Moment $APM.CK$ in Betreff

der

der Axe AD. Dieses Moment nimmt zu um das Moment des unendlich kleinen Trapezen PMmp, welches für ein Parallelogramm gelten kann, dessen Inhalt durch MP. Pp oder $y \partial x$ ausgedrücket werden kann. Der Schwerpunkt des Parallelogramms ist in der Mitte desselben, oder, wegen der unendlich kleinen Breite, in der Mitte C′ der Seite MP. Sein Moment für die Axe AD ist demnach $MP.Pp \times C'T = MP.pP \times AP = y \partial x . x = xy \partial x$. Folglich ist $APM \times CK = \int xy \partial x$, oder

$$CK = \frac{\int xy \partial x}{APM}$$

$$\text{oder } CK = \frac{\int xy \partial x}{\int y \partial x}$$

Ferner ist $C'P = \frac{1}{2}y$, also ist $APM \times CO = \int (y\partial x . \frac{1}{2}y) = \int \frac{1}{2}y^2 \partial x$,

$$CO = \frac{\int \frac{1}{2}y^2 \partial x}{APM}$$

$$\text{oder} \qquad CO = \frac{\int \frac{1}{2}y^2 \partial x}{\int y \partial x}$$

Wenn unterhalb der Axe AB noch ein Raum wie APM lieget, wie bei § 3 angenommen worden, so ist O der Schwerpunkt, und $AO = CK$. Folglich wird in diesem Falle AO durch die nämliche Formel, wie CK gefunden.

III. Es drehe sich der Bogen AM um seine Axe AB, so beschreibet er eine Kappe deren Größe wir F nennen wollen. Der Bogen nehme zu um $Mm = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, so beschreibet jeder Punkt dieses Bogens eine Kreislinie der beinahe $PM = y$ zum Halbmesser hat. Der Umfang solcher Kreislinie ist $2\pi y$. Nimmt man diese Kreislinie, so viel mal als Punkte im Bogen Mm sind, das heißt,

multi=

multiplizieret man sie mit Mm oder $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, so bekömmt man den kleinen von Mm beschriebenen Gürtel $= 2\pi y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Der Schwerpunkt desselben ist in P, wegen der unendlich kleinen Breite. Sein Moment ist demnach $2\pi y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} \times AP$ $= 2\pi x y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Folglich ist

$$F.AO = \int 2\pi x y \sqrt{(\partial x^2 + y^2)}$$ daher

$$AO = \frac{\int 2\pi x y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{F}$$

oder

$$AO = \frac{\int 2\pi x y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\int 2\pi y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{\int x y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\int y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$$

IV. Es sei jetzt O der Schwerpunkt des Körpers, welchen die Ebne APM durch ihre Umdrehung um die Axe AB beschreibet, und dessen Größe wir mit Σ bezeichnen wollen. Nimmt der Bogen um Mm zu, so nimmt der Körper zu um die unendlich dünne Scheibe, welche vom Trapezen $PMmp$ beschrieben wird, indem sich dieses Trapez um seine kleine Grundlinie mp drehet. Dieses Trapez kann, wegen der unendlich kleinen Breite, für ein Parallelogramm gehalten werden, und folglich die von demselben beschriebene Scheibe für einen Zylinder, dessen Grundfläche 2 PM oder $2y$ zum Durchmesser hat, und dessen Höhe Pp oder ∂x ist. Die Größe eines solchen Zylinders wird ausgedrücket durch $\pi y^2 \partial x$. Das Moment desselben, in Betrachtung des Punktes A, ist $\pi y^2 \partial x \times x$ $= \pi x y^2 \partial x$. Also ist

$$\Sigma .\ AO = \int \pi x y^2 \partial x$$

oder $$AO = \frac{\int \pi x y^2 \partial x}{\Sigma}$$

oder $$AO = \frac{\int \pi x y^2 \partial x}{\int \pi y^2 \partial x} = \frac{\int x y^2 \partial x}{\int y \partial x}$$

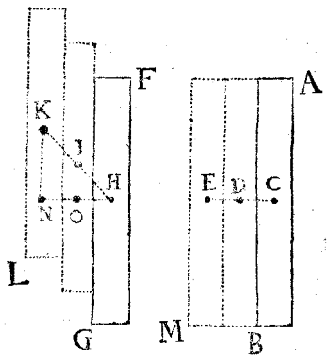
Mit einiger Aufmerksamkeit wird man leicht finden, daß die in diesem Paragraph gegebenen Formeln mit denen genau übereinstimmen, welche vorher gefunden worden.

§. 7.

Wir wollen dieses Hauptstück, welches von den Schwerpunkten handelt, mit einem wichtigen Lehrsatze beschließen, welchen man Guldins Regel zu nennen pfleget, weil ein Jesuit dieses Namens ihn am ersten entwikkelt hat, obgleich aus den Werken des Pappus zu erhellen scheinet, daß dieser Lehrsatz den Alten nicht unbekannt war: er lautet also: **Wenn eine Linie oder eine Ebne sich so beweget, daß der Schwerpunkt eine Bahn beschreibet, die auf der bewegten Linie oder Ebne senkrecht ist, so entstehet eine Fläche oder ein Körper, wovon die Größe gefunden wird, wenn man die erzeugende Linie oder Ebne mit dem Wege multipliziret, welchen der Schwerpunkt durchlaufen hat.**

Man kann die Flächen und Körper als Massen betrachten, welche durchaus homogen, oder von einförmiger Dichtigkeit sind, und folglich können die Flächen oder Körper durch ihre Gewichte vorgestellet werden, weil sie sich wie dieselben verhalten. Wenn nun ein Gewicht aus der Bewegung eines erzeugenden Gewichtes entstehet, so wird jenes erhalten, wenn man dieses so vielmal nimmt, als es Schritte gemacht hat, (die erste Lage für einen Schritt mitgerechnet). Nun aber ist das Gewicht einer Linie oder Fläche gleichsam im Schwerpunkte vereiniget. Folglich wird die Anzahl der gemachten Schritte durch die Anzahl der Punkte in der Bahn des Schwerpunktes bestimmet. Also brauchet man nur das erzeugende Gewicht so vielmal zu nehmen als Punkte in der Bahn des Schwerpunktes sind; das heißt, es muß das erzeugende Gewicht, es sei Linie oder Ebne, mit der Bahn des Schwerpunktes multipliziret werden.

Die Bedingung, daß die Bahn des Schwerpunktes auf der erzeugenden Linie oder Ebne senkrecht sein muß, habe ich hinzugesetzet, obgleich man sie sonst nicht anführet.



Denn wenn zum Exempel das Gewicht AB sich mit sich selbst parallel beweget, und so, daß der Weg CE des Schwerpunktes auf der Länge des Gewichts senkrecht sei, so kann ich sagen, das entstandene Gewicht AM enthalte das erzeugende AB so vielmal als Punkte C, D, E in dem Wege CE sind, welche Punkte so weit von einander entfernet sind, als die Breite des Gewichtes AB beträget. Ist die Breite unendlich klein, so ist AB bloß eine gerade Linie, oder das Profil einer Ebne, und die Punkte C, D, E liegen ganz neben einander, und bilden eine zusammenhängende Linie.

Wenn aber das Gewicht FG sich so beweget, daß die Bahn HK des Schwerpunktes nicht auf der Länge desselben

 ben

den senkrecht sei, so sind die Punkte H, I, K, nämlich die jedesmaligen Schwerpunkte des Gewichtes FG, weiter von einander entfernet als bei der vorigen Voraussetzung, der Weg HK ist länger, und die Breite des Gewichtes FG ist mehrmal in derselben enthalten. Wollte man demnach auf der Linie HK solche Theile abmessen, wie die Breite des Gewichtes FG beträgt, so würden mehr Punkte herauskommen. Das entstandene Gewicht FL enthält demnach das erzeugende Gewicht FG wenigermal als Punkte in der Linie HK gemerket werden können, die so weit von einander entfernet sind, als die Breite des erzeugenden Gewichtes beträgt. Und dieses gilt, wenn man auch bei dem erzeugenden Gewichte eine unendlich kleine Dicke annimmt, so daß es eine Linie oder Ebne werde. Folglich muß Guldins Regel so eingeschränkt werden, wie wir es gleich Anfangs gethan haben. Oder man müßte, anstatt der schiefen Bahn HK des Schwerpunktes, allemal in der Rechnung die zustimmende senkrechte HN nehmen. Bei dieser läßt sich in der That sagen, daß das erzeugte Gewicht FL das erzeugende FG so vielmal übertrifft als in HN Punkte wie H, O und N gemerket werden können, die so weit von einander entfernet sind, als die Breite des Gewichtes FG beträgt.

Es sei A die Größe der erzeugenden Linie oder Fläche, B die senkrechte Bahn des Schwerpunktes, C die Größe der erzeugten Fläche oder des erzeugten Körpers, so hat man demnach allemal diese Gleichung

$$A \times B = C$$

§. 8.

Laßt uns die erklärte Regel auf einige Beispiele anwenden.

Wenn eine gerade Linie sich mit sich selbst parallel in einer Ebne beweget, so beschreibet sie ein Rechteck. Der Schwer-

Schwerpunkt, welcher in der Mitte der geraden Linie ist, beschreibet eine Linie, welche die Höhe des Rechtecks bestimmet. Hier ist demnach A, oder die erzeugende Linie, die Grundlinie des Rechtecks, und B oder der vom Schwerpunkt durchlaufene Weg ist die Höhe des Rechtecks. Die erzeugte Figur C ist das Rechteck selbst. Da nun allemal $A \times B = C$, so erhält man den Flächen-Inhalt des Rechtecks, wenn man seine Grundlinie mit seiner Höhe multipliziret, wie auch sonst aus den ersten Anfangsgründen der Geometrie bekannt ist.

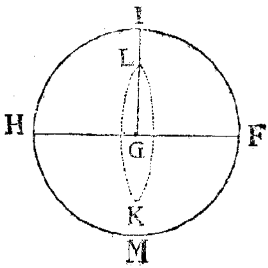
Wenn ein Rechteck sich um eine seiner Seiten als um eine Axe herumdrehet, so beschreibet die entgegengesezte Seite den Mantel eines geraden Zylinders. Der Schwerpunkt der erzeugenden Linie durchläuft eine Kreislinie, die derjenigen gleich ist, welche die Grundfläche des Zylinders begränzet. Hier ist demnach A die senkrechte Höhe des geraden Zylinders, B ist der Umkreis der Grundfläche, und C ist der erzeugte Mantel des Zylinders. Da nun $C = A \times B$, so ist der Mantel des Zylinders, gleich dem Produkte aus dem Umkreise der Grundfläche und aus der Höhe des Zylinders, oder der Mantel ist einem Rechtecke gleich, der gedachten Umkreis zur Grundlinie und die Höhe des Zylinders zur Höhe hat, wie auch die Geometrie lehret.

Man darf sich auch nur vorstellen, daß die Kreislinie sich mit sich selbst parallel längs der Axe beweget, so kömmt das nämliche heraus.

Eine gerade Linie $= A$ bewege sich um eines ihrer Enden herum, welches nicht aus der Stelle weichen kann, so beschreibet die ganze Linie eine Zirkelfläche $= C$, wovon A der Halbmesser ist. Der Schwerpunkt der bewegten Linie aber beschreibet eine Kreislinie $= B$, die nur halb so groß ist als der Umkreis des beschriebenen Zirkels. Da

 nun

nun $C = A \times B$, so bekömmt man die Zirkelfläche, wenn man den Halbmesser mit dem halben Umkreise, oder, welches einerlei ist, den Umkreis mit der Hälfte des Halbmessers, oder den Umkreis mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers multipliziret, wie sonst auch bekannt ist. Bei dieser Bewegung ist der Weg des Schwerpunktes allemal auf der erzeugenden Linie senkrecht, weil der Halbmesser allemal auf der Kreislinie senkrecht stehet.



Es sei FIH eine halbe Kreislinie, FG oder GH deren Halbmesser, folglich FH der Durchmesser oder die Sehne der halben Kreislinie FIH. Es sei $GH = GF = GI = r$. Es verhalte sich in jedem Zirkel der Durchmesser zum Umkreise oder der Halbmesser zum halben Umkreise wie 1 zu π, so ist GF zu FIH oder r zu FIH wie 1 zu π, folglich $FIH = r\pi$. Es sei L der Schwerpunkt der halben Kreislinie FIK, so ist (§ 2. Zus.)

$$FIH, FH :: GI, GL$$

oder $\quad r\pi, 2r, :: r, GL$

oder $\quad \pi, 2 :: r, GL$

daher $\quad GL = \frac{2r}{\pi}$

Nun

Nun drehe sich die halbe Kreislinie $FIH = r\pi = A$ um ihren Halbmesser FH herum, so beschreibet sie eine Kugelfläche $FIHMF = C$. Der Schwerpunkt L beschreibet eine neue Kreislinie $LK = B$, welche GL zum Halbmesser hat. Folglich ist

$$GL, LK :: 1, 2\pi$$

$$\frac{2r}{\pi}, B :: 1, 2\pi$$

daher $$B = 4r$$

das heißt, die vom Schwerpunkte beschriebene Kreislinie ist doppelt so groß als der Durchmesser der erzeugenden halben Kreislinie, welches Verhältniß merkwürdig genug ist, aber hier nur beiläufig angeführet wird.

Nun ist allemal

$$C = A \times B$$

folglich im gegenwärtigen Falle

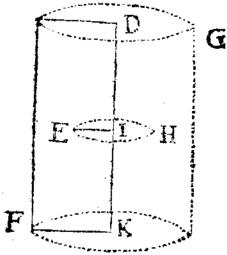
$$C = r\pi . 4r$$

oder $$C = 4r^2\pi$$

Nun ist $r^2\pi$ die Fläche eines Kreises, welcher r zum Halbmesser hat. Folglich wird hierdurch der Satz bestätiget, daß die Oberfläche einer Kugel 4mal so groß ist als die Fläche des größten Zirkels in der Kugel.

Uebrigens war bei diesem Exempel die Bewegung wiederum so beschaffen, daß die vom Schwerpunkte beschriebene Kreislinie allemal auf der Ebne des erzeugenden Halbzirkels, und folglich auf dessen Umkreise senkrecht war.

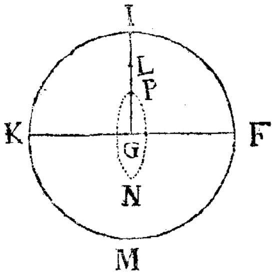
Die vorigen Beispiele beziehen sich alle auf die Bewegung der Linien. Laßt uns nun die Bewegung der Ebnen betrachten.



Es sei DK $= h$, und KF $= r$, so ist das Rechteck DF $= hr$. Dessen Schwerpunkt ist in E, so daß IE $= \frac{1}{2}$ KF $= \frac{1}{2} r$. Es drehe sich das Rechteck DF um die Axe DK, so beschreibet der Schwerpunkt eine Kreislinie EH. Verhält sich nun der Halbmesser zum Umkreise wie 1 zu 2π, so ist die Kreislinie EH $= \frac{1}{2} r . 2\pi = r\pi$. Hier ist demnach DF $= hr =$ A, EH $= r\pi =$ B, und der entstandene Zylinder GF $=$ C. Da nun C $=$ A $\times$ B, so ist hier C $= hr \times r\pi = hr^2\pi$. Da nun $r^2\pi$ die Grundfläche des Zylinders ist, so wird der körperliche Inhalt desselben gefunden, wenn man diese Grundfläche mit der Höhe h multipliziret, wie auch sonst schon bekannt ist.

Man kömmt auf das nämliche Resultat, wenn man annimmt, daß die Grundfläche $r^2\pi$, sich längs der Linie h beweget, da dann der entstandene Körper $hr^2\pi$ ist.

Es



Es sei FIK ein Halbzirkel, der durch seine Umdrehung um den Diameter FK die Kugel FIKMF erzeuget. Es sei GK $= r$, so ist die Fläche des Halbzirkels FIK $= \frac{1}{2} r^2 \pi = A$. Für den Schwerpunkt L des Bogens FIK wurde gefunden $GL = \frac{2r}{\pi}$. Hingegen für den Schwerpunkt P der Ebne FIK muß (V H. § 34) genommen werden $GP = \frac{2}{3} GL = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r}{\pi} = \frac{4r}{3\pi}$. Ist nun PN der Kreis, welchen der Schwerpunkt P beschreibet, so ist

$$GP, PN :: 1, 2\pi$$

$$\frac{4r}{3\pi}, PN :: 1, 2\pi$$

daher $$PN = \frac{8r}{3}$$

Es sei die Kugel $= C$. Nun ist der Halbkreis FIK $= \frac{1}{2} r^2 \pi = A$, und $PN = \frac{8r}{3} = B$. Da nun

$$C = A \times B$$

so ist hier

$$C = \tfrac{1}{2} r^2 \pi . \frac{8r}{3}$$

oder $$C = \frac{8r^3\pi}{6} = \frac{4r^3\pi}{3}$$

Hätte ein Zylinder $2r$ zum Durchmesser und $2r$ zur Höhe, so wäre seine Solidität $C' = 2r^3\pi$. Also ist

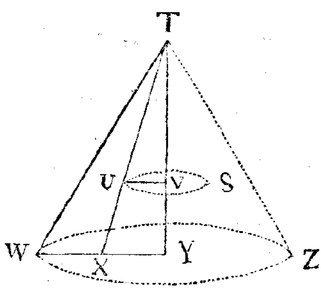
$$C, C' :: \frac{4r^3\pi}{3}, 2r^3\pi$$

$$C, C' :: \frac{4}{3}, 2$$

$$C, C' :: 4, 6$$

$$C, C' :: 2, 3$$

Dieses stimmet demnach mit dem bekannten Lehrsatze, daß die Kugel sich zum umschriebenen Zylinder verhält wie 2 zu 3.



Im rechtwinklichten Dreiecke TYW sei $TY = h$, $YW = r$, so ist das Dreieck $TYW = \frac{1}{2} hr = A$.

Halbire YW in X, ziehe TX, nimm $XU = \frac{1}{3} TX$, so ist U der Schwerpunkt des Dreiecks (V H. §22). Ferner ist

$$TX, TU :: XY, UV$$

$$3, 2 :: \tfrac{1}{2} r, UV$$

daher $$UV = \tfrac{1}{3} r$$

Drehet sich das Dreieck um die Axe TY, so entstehet ein Kegel = C. Unterdessen beschreibet der Punkt U einen Zirkel US, dessen Umkreis $= UV . 2\pi = \frac{1}{3} r . 2\pi$
$= \frac{2}{3} r\pi = B$.

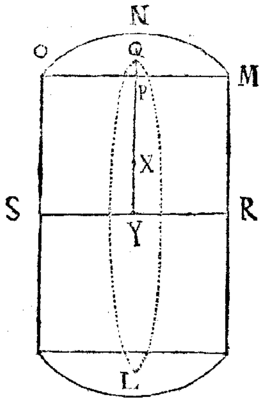
Nun ist $$C = A \times B$$

hier $$C = \tfrac{1}{2} hr \times \tfrac{2}{3} r\pi.$$

oder $$C = \tfrac{1}{3} hr^2 \pi$$

das heißt, die Grundfläche $r^2 \pi$ wird mit dem dritten Theile der Höhe multipliziret, wie auch die Geometrie lehret.

(Siehe die folgende Figur.)



Es sei RMOSR ein Rechteck, das sich mit dem Zirkel-Abschnitte MNOM endiget, dessen Bogen aus dem Mittelpunkte X beschrieben worden. Es sei Q der Schwerpunkt des Abschnittes. Es sei $n^2 = A$ der Flächen-Inhalt des Abschnittes, m die Sehne MO, so ist (§ 3 Zus.)

$$3n^2, \tfrac{1}{4}m^2 :: m, XQ$$

$$\text{daher} \quad XQ = \frac{\frac{1}{4}m^3}{3n^2} = \frac{m^3}{12n^2}$$

Da der Bogen NO samt dem Sinus PO gegeben sind, so ist auch der Kosinus PX gegeben. Ist nun ferner MR oder YP bekannt, und man ziehet davon ab den Kosinus PX, so bleibet eine bekannte Größe YX, welche wir k nennen wollen. Also ist

$$YQ = YX + XQ = k + \frac{m^3}{12n^2}$$

Drehet

Drehet sich nun die Figur RMNOSR um die Axe RS herum, so beschreibet der Abschnitt MNOM einen Ring $= C$, welcher sich an den Zylinder anschließet, den das Rechteck MS beschreibet. Unterdessen beschreibet der Schwerpunkt Q eine Kreislinie QL $=$ B, welche YQ oder $k + \frac{m^3}{12 n^2}$ zum Halbmesser hat. Die Kreislinie selbst ist demnach

$$\left(k + \frac{m^3}{12 n^2}\right) 2\pi = 2 k \pi + \frac{m^3 \pi}{6 n^2} = B.$$

Nun ist $C = A \times B$

hier $C = n^2 . \left(2 k \pi + \frac{m^3 \pi}{6 n^2}\right)$

oder $C = 2 k n^2 \pi + \frac{m^3 \pi}{6}$

Fiele der Mittelpunkt X in die Axe RS, so wäre XY $= k = o$, also

$$C = \tfrac{1}{6} m^3 \pi$$

Man stelle sich eine Kugel vor, welche die Sehne m zum Durchmesser, folglich $\frac{1}{2} m$ zum Halbmesser hat, so ist ihre Solidität $\frac{4}{3} (\frac{1}{2} m)^3 \pi = \frac{4}{3} . \frac{1}{8} . m^3 \pi = \frac{1}{6} m^3 \pi = C$. Wenn sich also ein Zirkelabschnitt um den Mittelpunkt drehet, so daß die Sehne mit der Axe parallel sei, so ist der entstehende Ring so groß an Solidität als eine Kugel, welche gedachte Sehne zum Durchmesser hätte.

Ist aber der Mittelpunkt X von der Axe um XY $= k$ entfernet, so kömmt zum Inhalte des Ringes noch hinzu $2 k n^2 \pi = n^2 . 2 k \pi$. Nun ist n^2 der Flächen-Inhalt des Abschnittes, und $2 k \pi$ der vom Mittelpunkte X beschrieschriebene Umkreis. Das hinzukommende Stück ist demnach so groß als ein Zylinderstück, welches den Abschnitt zur Grundfläche, und die vom Mittelpunkte X beschriebene Kreislinie zur Höhe hätte.

Wir wollen diese Betrachtungen nicht weiter fortsetzen, weil sie mehr in die Geometrie als in die Mechanik einschlagen.

§. 9.

Da $C = A \times B$, so folget

$$A = \frac{C}{B}$$

das heißt, man findet die Größe der erzeugenden Figur, wenn man die Größe der erzeugten durch den Weg dividiret, welchen der Schwerpunkt der erzeugenden durchlaufen hat.

Z. E. Gesezt, man weiß, daß die Kugel $= \frac{4 r^3 \pi}{3}$ (§ 8) und daß die vom Schwerpunkte des erzeugenden Halbzirkels durchlaufene Kreislinie $= \frac{8 r}{3}$, so folget, daß der Halbzirkel $= \frac{4 r^3 \pi}{3} : \frac{8 r}{3} = \frac{1}{2} r^2 \pi$, folglich der ganze Zirkel $= r^2 \pi$.

Aus der nämlichen Gleichung $C = A \times B$ folget noch

$$B = \frac{C}{A}$$

das heißt, man bekömmt den Weg, den der Schwerpunkt der erzeugenden Figur durchlaufen hat, wenn man die erzeugte durch die erzeugende dividiret.

Zum

Zum Exempel die Kugel ist $= \frac{4 r^3 \pi}{3}$ und der erzeugende Halbzirkel $= \frac{r^2 \pi}{2}$, folglich ist $B = \frac{4 r^3 \pi}{3} : \frac{r^2 \pi}{2}$ $= \frac{8 r}{3}$, welches die Größe der vom Schwerpunkte des Halbzirkels durchlaufenen Kreislinie ist.

§. 10.

Aus der Gleichung $C = A \times B$ kann ferner geschlossen werden, daß verschiedene erzeugte Figuren sich gegen einander verhalten, wie die erzeugenden und wie die Wege der Schwerpunkte. Sind die erzeugenden Figuren gleich, so verhalten sich die erzeugten, wie die Wege der Schwerpunkte. Sind die Wege der Schwerpunkte gleich, so verhalten sich die erzeugten wie die erzeugenden. Die erzeugten sind gleich, wenn die erzeugenden sich umgekehrt verhalten wie die Wege der Schwerpunkte.

Aus $B = \frac{C}{A}$ folget, daß die Wege der Schwerpunkte sich verhalten, gerade wie die erzeugten Figuren, und umgekehrt wie die erzeugenden, u. s. f.

Aus $A = \frac{C}{B}$ folget, daß die erzeugenden Figuren sich verhalten, gerade wie die erzeugten, und umgekehrt wie die Wege der Schwerpunkte.

Wir wollen alle diese Proporzionen nicht weiter untersuchen, noch durch Beispiele bestätigen, weil sie auf nichts führen, als was schon bekannt ist.

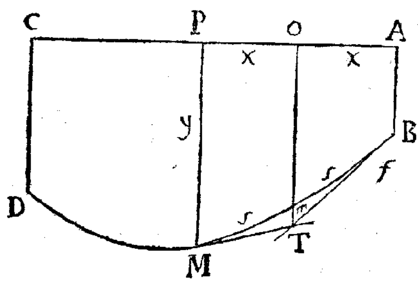
Neuntes Hauptstück.

Von der Kettenlinie und von den elastischen Linien.

§. 1.

Wir haben schon am gehörigen Orte (VI H. § 44) etwas Weniges von der Kettenlinie gesaget, und den Grund zur näheren Kenntniß derselben geleget. Jezt wollen wir sie genauer untersuchen, welches ohne Hülfe der höheren Rechnungen nicht geschehen kann. Auch wollen wir im gegenwärtigen Hauptstücke eine andere Linie betrachten, deren Natur eben so schwer zu bestimmen ist, nämlich die elastische Linie. Wir machen mit der Kettenlinie den Anfang.

§. 2.



Es sei BD eine Kette oder ein vollkommen biegsamer Faden, der in B und D befestiget ist, und herunterhängend eine

eine krumme Linie bildet, deren Natur bestimmet werden soll.

In der vertikalen Ebne, welche durch die hängende Kette gehet, ziehe man willkürlich die horizontale gerade Linie AC. Aus den Enden B und D der Kette, desgleichen aus einem willkürlichen Punkte M derselben fälle man die senkrechten Linien BA, DC, MP auf die horizontale AC. Nimmt man AC zur Richtlinie und den Punkt A zum Ursprunge der Abzissen, so sind BA, MP, DC Applikaten, wozu die Abzissen o, AP und AC gehören.

Man ziehe die Tangenten BT und MT für die Punkte B und M der krummen Linie, und aus dem Punkte T, wo sie einander begegnen, fälle man TO senkrecht auf AC.

Nun sei $AP = x$, $PM = y$, der Bogen $BM = s$. Es sei n das Gewicht dieses Bogens, weil die Kette von ungleicher Dicke sein kann; denn sonst könnte bei einer einförmigen Dicke s selbst das Gewicht des Bogens vorstellen. Die Spannung der Kette in B nach der Richtung BT sei f, so daß f die Kraft ausdrücket, welche auf den Nagel in B wirket. Endlich sei m der Winkel, welchen die Richtung dieser Kraft mit der Vertikal-Linie TO bildet.

Wir nehmen an, daß die Kette in Gleichgewicht sei, und ohne Bewegung herunter hänge, so leidet der Punkt M ein Ziehen in der Richtung MT, welches aber durch die Gegenwirkung des übrigen Theiles MD vernichtet wird, und also ohne Erfolg bleibet. Nun ist es gleich viel, ob der Punkt M durch die Gegenwirkung des Theiles MD der Kette, oder durch irgend eine andere Kraft zurückgehalten wird. Man kann sich also vorstellen, es werde der Punkt M vermittelst eines Nagels befestiget, so wird der Theil BM der Kette unverrücket bleiben, und seine vorige Lage und Krümmung behalten.

Dieses für jezt angenommen, so ist bewiesen worden (VI H. §44), daß

$$\pi : f :: \mathfrak{S}(\mathrm{BTM}) : \mathfrak{S}(\mathrm{OTM})$$

Nun ist bekannt, daß die trigonometrische Tangente des Winkels TMP, den die berührende Linie MT mit der Applikate MP machet, allemal ausgedrücket wird durch $\frac{\partial x}{\partial y}$, welches man in jeder etwas vollständigen Anleitung zur höheren Geometrie finden wird. Oder, wenn man, wie oft gebräuchlich ist, das Verhältniß $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch einen einzigen Buchstaben p ausdrücket, so ist

$$\mathfrak{T}(\mathrm{TMP}) = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{p}$$

Nun ist überhaupt, vermöge der trigonometrischen Formeln,

$$\mathfrak{S}\,z = \frac{\mathfrak{T}\,z}{\sqrt{(1 + \mathfrak{T}\,z^2)}}$$

$$\mathfrak{S}'z = \frac{1}{\sqrt{(1 + \mathfrak{T}\,z^2)}}$$

Setzet man in diese Formeln TMP anstatt z, und $\frac{1}{p}$ anstatt $\mathfrak{T}(\mathrm{TMP})$ oder $\mathfrak{T}\,z$, so wird

$$\mathfrak{S}(\mathrm{TMP}) = \frac{\frac{1}{p}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + p^3)}}$$

$$\mathfrak{S}'(\mathrm{TMP}) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)}} = \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2)}}$$

Die

Die Winkel OTM und TMP machen zusammen 180° wegen der parallelen Linien TO und MP, die von der MT geschnitten werden. Also ist einer das Supplement des anderen. Sie haben demnach den nämlichen Sinus und den nämlichen Kosinus, jedoch den lezteren mit verwechseltem Zeichen. Folglich ist

$$\mathfrak{S}\,(\mathrm{OTM}) = \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$\mathfrak{S}'(\mathrm{OTM}) = \frac{-p}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

Der Winkel BTM ist die Summe der Winkel BTO und OTM. Es ist aber überhaupt $\mathfrak{S}(u+z) = \mathfrak{S}\,u.\mathfrak{S}'z + \mathfrak{S}'u.\mathfrak{S}\,z$. Also ist

$$\mathfrak{S}(\mathrm{BTM}) = \mathfrak{S}(\mathrm{BTO}+\mathrm{OTM})$$

$$= \mathfrak{S}(\mathrm{BTO}).\ \mathfrak{S}'(\mathrm{OTM}) + \mathfrak{S}'(\mathrm{BTO}).\ \mathfrak{S}\,(\mathrm{OTM})$$

$$= \mathfrak{S}\,m.\frac{-p}{\sqrt{(1+p^2)}} + \mathfrak{S}'m.\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$= \frac{\mathfrak{S}'m - p\,\mathfrak{S}\,m}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

Laßt uns nun unser Grundverhältniß wiederum vornehmen. Wir hatten

$$n : f :: \mathfrak{S}\,(\mathrm{BTM}) : \mathfrak{S}\,(\mathrm{OTM})$$

also $$n : f :: \frac{\mathfrak{S}'m - p\,\mathfrak{S}\,m}{\sqrt{(1+p^2)}} : \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

oder $$n : f :: (\mathfrak{S}'m - p\,\mathfrak{S}\,m) : 1$$

daher

$$\text{daher} \quad \Pi = f.\mathfrak{S}'m - pf.\mathfrak{S}m$$

$$p.f.\mathfrak{S}m = f\mathfrak{S}'m - \Pi$$

$$p = \frac{f.\mathfrak{S}'m - \Pi}{f.\mathfrak{S}m}$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{f.\mathfrak{S}'m - \Pi}{f.\mathfrak{S}m}$$

Dieses ist demnach die allgemeine Differenzial-Gleichung der Kettenlinie. Die Spannung f des Endes B der Kette ist eine beständige und unveränderte Größe. Der Winkel m ist ebenfalls unveränderlich, denn er ist allemal das Supplement des Winkels ABT, welchen das Ende B der krummen Linie mit der vertikalen AB machet. Wäre demnach Π eine Funkzion von x und y, das heißt, wenn das Gewicht des Theiles BM der Kette eine Funkzion von den zustimmenden Koordinaten AP und PM wäre, so enthielte die ganze Gleichung nichts als x, y, ∂x, ∂y, und beständige Größen, und folglich könnte sie integrabel sein.

Wenn die Kette von einförmiger Dicke und Schwere ist, so kann das Gewicht jedes Bogens durch den Bogen selbst vorgestellet werden. Nämlich, der Theil BM der Kette bestehe aus s Einheiten, und jede Einheit wiege 1 Gewichts-Maaß, so wieget der Bogen auch s Gewichts-Maaße. Also ist in diesem Falle $\Pi = s$, und die Gleichung wird

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{f\mathfrak{S}'m - s}{f.\mathfrak{S}m}$$

Weil s allemal $= \int\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, so differenzire man zum zweitenmale, um keine andere veränderliche Größen zu behalten, als die Differenziale von x und y.

Dabei

Dabei behandele man ∂x als beständig, welches allemal erlaubt ist, wenn man sich nur in der Folge dieser Annahme erinnert. Dann kömmt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x} = \frac{-\partial s}{f.\mathfrak{S} m}$$

oder $$\frac{\partial^2 y}{\partial x} = \frac{-\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{f.\mathfrak{S} m}$$

oder $$\partial^2 y = \frac{-\partial x \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{f.\mathfrak{S} m}$$

oder, wenn man beiderseits mit ∂y multipliziret,

$$\partial y . \partial^2 y = -\frac{\partial y . \partial x . \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{f.\mathfrak{S} m}$$

oder $$\frac{\partial y . \partial^2 y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{-\partial y . \partial x}{f.\mathfrak{S} m}$$

oder $$\partial y . \partial(\partial y) . (\partial x^2 + \partial y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\partial x}{f.\mathfrak{S} m} \partial y$$

$$\tfrac{1}{2} . (\partial x^2 + \partial y^2)^{-\frac{1}{2}} (2 \partial y . \partial(\partial y)) = \frac{-\partial x}{f \mathfrak{S} m} \partial y$$

$$\tfrac{1}{2} (\partial x^2 + \partial y^2)^{-\frac{1}{2}} \partial(\partial x^2 + \partial y^2) = \frac{-\partial x}{f \mathfrak{S} m} . \partial y$$

Man erinnere sich, daß ∂x beständig ist. Hier siehet man im ersten Gliede eine Potenz mit dem Differenziale der Wurzel multipliziret, also kömmt zum Integrale

$$\frac{\tfrac{1}{2} (\partial x^2 + \partial y^2)^{-\frac{1}{2} + 1}}{-\tfrac{1}{2} + 1} = \frac{-\partial x}{f \mathfrak{S} m} . y + \frac{\alpha \partial x}{f \mathfrak{S} m}$$

oder

$$\text{oder } (\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(\alpha - y)\,\partial x}{f.\mathfrak{S}m}$$

Im zweiten Gliede haben wir, anstatt der beständigen Größe, $\frac{\alpha\,\partial x}{f\mathfrak{S}m}$ zugesezet. Denn wenn ∂x beständig ist, so kann bei der zweiten Differenziazion nichts verschwinden als was mit ∂x multiplizirer ist. Folglich hätten wir können sezen z. E. $a'\partial x$, es hindert aber nichts, anzunehmen, daß $\alpha' = \frac{\alpha}{f\mathfrak{S}m}$, indem a' unbestimmt, obgleich beständig ist. Man konnte auch mit dem Wurzelzeichen schreiben

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{(\alpha - y)\,\partial x}{f\mathfrak{S}m}$$

Man quadrire beiderseits, so kömmt

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{(\alpha - y)^2\,\partial x^2}{f^2.\,\mathfrak{S}m^2}$$

oder, wenn wir, der Kürze halben, annehmen $f\mathfrak{S}m = \beta$, so ist

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{(\alpha - y)^2.\,\partial x^2}{\beta^2}$$

$$\partial x^2.\,\beta^2 + \partial y^2.\,\beta^2 = (\alpha - y)^2.\,\partial x^2$$

$$\partial y^2.\,\beta^2 = (\alpha - y)^2.\,\partial x^2 - \beta^2\,\partial x^2$$

$$\frac{\partial y^2.\,\beta^2}{(\alpha - y)^2 - \beta^2} = \partial x^2$$

$$\beta.\,\frac{\partial y}{\sqrt{[(\alpha - y)^2 - \beta^2]}} = \partial x$$

$$\text{oder } -\beta.\,\frac{-\partial y}{\sqrt{[(\alpha - y)^2 - \beta^2]}} = \partial x$$

Man

Man vergleiche das erste Glied mit der allgemeinen Integral-Formel

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(z^2+a^2)}} = C + l\,[z + \sqrt{(z^2+a^2)}]$$

wo C die willkürliche beständige Größe vorstellet, so ist im gegenwärtigen Falle $z = \alpha - y$, folglich $\partial z = -\partial y$. Es ist auch $a^2 = -\beta^2$. Setzet man diese Werthe in die Formel, so kömmt

$$\int \frac{-\partial y}{\sqrt{[(\alpha-y)^2-\beta^2]}} = C + l\,[(\alpha-y) + \sqrt{[(\alpha-y)^2-\beta^2]}]$$

folglich

$$-\beta\int \frac{-\partial y}{\sqrt{[(\alpha-y)^2-\beta^2]}} = -\beta C - \beta\, l\,[(\alpha-y) + \sqrt{[(\alpha-y)^2 - \beta^2]}]$$

Es sei $-\beta C = \gamma$, so ist endlich

$$x = \gamma - \beta\, l\,[(\alpha-y) + \sqrt{[(\alpha-y)^2-\beta^2]}]$$

und dieses ist die wahre Gleichung für die Kettenlinie, wenn die Kette von einförmiger Schwere ist.

Laßt uns versuchen, die beständigen Größen α und γ zu bestimmen. Wir hatten gefunden

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{(\alpha-y)\,\partial x}{f\mathfrak{S}m}$$

oder . . . . . $\partial s = \dfrac{(\alpha-y)\,\partial x}{f\mathfrak{S}m}$

oder . . . . . $\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{\alpha-y}{f.\mathfrak{S}m}$

oder . . . . . $\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{f.\mathfrak{S}m}{\alpha-y}$

Machet man das in der höheren Geometrie bekannte kleine Differenzial-Dreieck, so findet sichs, daß $\frac{\partial x}{\partial s}$ den Sinus des Winkels PMT ausdrücket. Folglich ist

$$\mathfrak{S}(\mathrm{PMT}) = \frac{f.\mathfrak{S}m}{\alpha - y}$$

Gehet nun die Applikate PM zurück, so wird zulezt PM = AB, und $\angle$ PMT $= \angle m$. Folglich ist, wenn wir AB mit k bezeichnen,

$$\mathfrak{S}m = \frac{f.\mathfrak{S}m}{\alpha - k}$$

$$1 = \frac{f}{\alpha - k}$$

$$\alpha - k = f$$

$$\alpha = k + f$$

Um γ zu bestimmen, nehmen wir die Gleichung $x = \gamma - \beta l[(\alpha - y) + \sqrt{}[(\alpha - y)^2 - \beta^2]]$. Wenn x null wird, so wird $y = k$, folglich ist $0 = \gamma - \beta l[(\alpha - k) + \sqrt{}[(\alpha - k)^2 - \beta^2]]$, daher

$$\gamma = \beta l[(\alpha - k) + \sqrt{}[(\alpha - k)^2 - \beta^2]]$$

da aber $\alpha = k + f$, so ist $\alpha - k = f$, folglich

$$\gamma = \beta l(2f - \beta^2)$$

Setzen wir nun in die Gleichung, die den Werth von x ausdrücket, $f\mathfrak{S}m$ anstatt β, $k + f$ anstatt α, und $f\mathfrak{S}m\,l(2f - f^2\mathfrak{S}m^2)$ anstatt γ, so kömmt

$$x = f\mathfrak{S}m\,l(2f - f^2\mathfrak{S}m^2) - f\mathfrak{S}m\,l[(k + f - y) + \sqrt{}[(k + f - y)^2 - f^2\mathfrak{S}m^2]]$$

oder

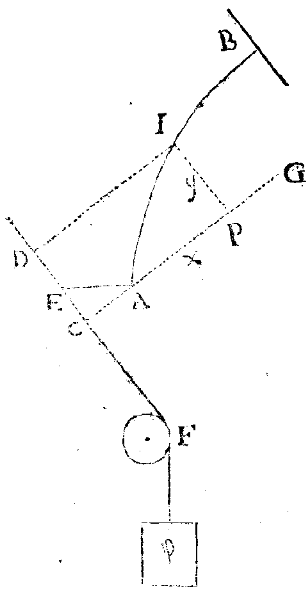
oder $x = f \mathfrak{S} m \, l \, \frac{2f - f^2 \mathfrak{S} m^2}{(k+f-y) + \sqrt{[(k+f-y)^2 - f^2 \mathfrak{S} m^2]}}$

Gehet die horizontale Linie AC durch den Punkt B, so ist $k = 0$, und dann ist

$$x = f \mathfrak{S} m \, l \, \frac{2f - f^2 \mathfrak{S} m^2}{f - y + \sqrt{[(f-y)^2 - f^2 \mathfrak{S} m^2]}}$$

§. 3.

Wenn man elastische Stangen oder Klingen bieget, so entstehen krumme Linien, welche elastische Linien genannt werden. Diese wollen wir jezt betrachten.



Es ist BIA eine elastische Klinge von einförmiger Dicke und Natur. Sie ist bei B in einen festen Körper eingesteckt. Am Ende A ist ein unbiegsamer Stab AE befestiget. Am Ende desselben wirket eine Kraft, z. E. das Gewicht φ, in einer beliebigen Richtung EF. Und wir nehmen an, daß das ganze System in diesem Augenblicke in Gleichgewicht ist. Durch das Ende A der Klinge BIA ziehe man GC senkrecht auf die Richtung EF der Kraft φ. Man nehme AG zur Abzissen-Linie, und A zum Ursprunge. Es sei $AP = x$ eine willkürliche Abzisse, und $PI = y$ die zustimmende senkrechte Applikate. Man verlängere FE nach D zu, und fälle aus dem Punkte I die ID senkrecht auf FD, so ist $\varphi \times ID$ das Moment der Kraft φ in Betreff des Punktes I. Es ist aber $ID = CP = AC + AP = AC + x$. Es sei $AC = c$, welche Größe durch das Dreieck ACE gegeben ist, so wird $CP = c + x$, und das Moment der Kraft φ, das heißt, ihre Wirkung auf dem Punkt I ist

$$\varphi\,(c + x)$$

Soll das Gleichgewicht statt finden, so muß dieses Moment so groß sein als die Gegenwirkung der Elastizität in I. Nun aber hänget die Größe dieser Wirkung ab 1) von dem Grade der Elastizität, welcher in der Beschaffenheit der Materie der Klinge lieget, welchen Grad der Elastizität wir durch E ausdrücken wollen; 2) von der Krümmung der Klinge in jedem ihrer Punkte, so daß man annehmen kann, die Elastizität in den verschiedenen Punkten der krummen Linie verhalte sich umgekehrt wie die zu diesen Punkten gehörigen Halbmesser der Krümmung. Es ist aber für jeden Punkt I der Halbmesser der Krümmung, wie es die Geometrie der krummen Linien lehret,

$$\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{-\,\partial x\,\partial^2 y}$$

wo

wo ∂x als beständig betrachtet wird. Folglich verhält sich aus der zweiten Ursach die Elastizität des Punktes I wie

$$\frac{-\partial x.\partial^2 y}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Multiplizirt man diesen Bruch mit der absoluten Elastizität E, die von der inneren Beschaffenheit der Klinge abhängt, so ist die ganze Wirkung der Elastizität im Punkte I

$$\frac{-E\,\partial x\,\partial^2 y}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und da diese Wirkung dem Momente $\varphi(c+x)$ gleich sein soll, so ist

$$\varphi(c+x) = \frac{-E\,\partial x.\partial^2 y}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Man multiplizire beiderseits mit ∂x, so ist

$$\varphi(c\,\partial x + x\,\partial x) = -E.\frac{\partial x^2.\partial^2 y}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Das erste Glied ist leicht zu integriren. Um aber das zweite zu integriren, so nehme man an, es sei $\partial y = \frac{\partial x}{\partial m}$, wohl verstanden, daß ∂x allemal als eine beständige Größe behandelt wird. Dann wird

$$\partial^2 y = \partial\left(\frac{\partial x}{\partial m}\right) = \frac{-\partial x.\partial^2 m}{\partial m^2}$$

folglich $\quad \partial x^2.\partial^2 y = \dfrac{-\partial x^3.\partial^2 m}{\partial m^2}$

Ferner

$$(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\partial x^2 + \frac{\partial x^2}{\partial m^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{\partial x^2 . \partial m^2 + \partial x^2}{\partial m^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left[\frac{\partial x^2}{\partial m^2}(\partial m^2 + 1)\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{\partial x^2}{\partial m^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (\partial m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\partial x^3}{\partial m^3}(\partial m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

Also

$$\frac{\partial x^2 . \partial^2 y}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\partial x^3 . \partial^2 m}{\partial m^2} : \frac{\partial x^3 (\partial m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\partial m^3}$$

$$= \frac{-\partial x^3 . \partial^2 m}{\partial m^2} . \frac{\partial m^3}{\partial x^3 (\partial m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-\partial m . \partial^2 m}{(\partial m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\partial m^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} . (2 \partial m \partial^2 m)$$

Da nun $2\partial m . \partial^2 m$ das Differenzial von $(\partial m^2 + 1)$ ist, so geschiehet das Integriren nach der gewöhnlichen Regel für den Potenzen, nämlich man bekömmt

$$-\tfrac{1}{2} . \frac{(\partial m^2 + 1)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}$$

oder $\quad (\partial m^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$

oder $\quad \dfrac{1}{\sqrt{(\partial m^2 + 1)}}$

oder

oder $$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2}+1\right)}}$$

oder $$\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial y^2}}}$$

oder $$\frac{\partial y}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}$$

Multipliziret man noch mit $-E$, so ist das Integral des zweiten Gliedes $\frac{-E\partial y}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}$

Das Integral des ersten Gliedes ist augenscheinlich
$$\varphi(a+cx+\tfrac{1}{2}x^2)$$
wo a eine willkürliche beständige Größe ist, die man nur in dem einen Gliede anzubringen nöthig hat. Demnach ist
$$\varphi(a+cx+\tfrac{1}{2}x^2)=\frac{-E\partial y}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}$$

Man quadrire beiderseits, so kömmt
$$\varphi^2(a+cx+\tfrac{1}{2}x^2)^2=\frac{E^2\partial y^2}{\partial x^2+\partial y^2}$$

Es sei für einen Augenblick, der Kürze halben, $a+cx+\frac{1}{2}x^2=U$, so ist
$$\varphi^2\,U^2=\frac{E^2\,\partial y^2}{\partial x^2+\partial y^2}$$
$$\varphi^2\,U^2.\,\partial x^2+\varphi^2\,U^2.\,\partial y^2=E^2\,\partial y^2$$
$$\varphi^2\,U^2\,\partial x^2=(E^2-\varphi^2\,U^2)\,\partial y^2$$
daher $$\partial y^2=\frac{\varphi^2\,U^2\,\partial x^2}{E^2-\varphi^2\,U^2}$$
$$\partial y=\frac{\varphi\,U\,\partial x}{\sqrt{(E^2-\varphi^2\,U^2)}}$$

oder

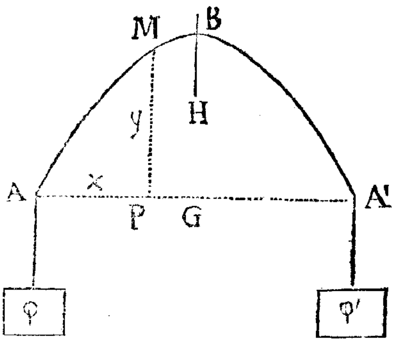
oder $$\partial y = \frac{\varphi(a + cx + \tfrac{1}{2}x^2)\,\partial x}{\sqrt{[E^2 - \varphi^2(a + cx + \tfrac{1}{2}x^2)^2]}}$$

Dieses ist die Differenzial-Gleichung der elastischen Linie, welche man aber bis jezt noch nicht hat integriren können. Diese Linie wird demnach zu den sogenannten mechanischen Linien gerechnet, worin das Verhältniß der Koordinaten nicht anders als durch eine Differenzial-Gleichung gegeben werden kann.

Zusatz I. Wenn die Kraft φ unmittelbar am Ende A der Klinge angebracht ist, so verschwindet die Größe AC oder c, und man hat bloß

$$\partial y = \frac{\varphi(a + \tfrac{1}{2}x^2)\,\partial x}{\sqrt{[E^2 - \varphi^2(a + \tfrac{1}{2}x^2)^2]}}$$

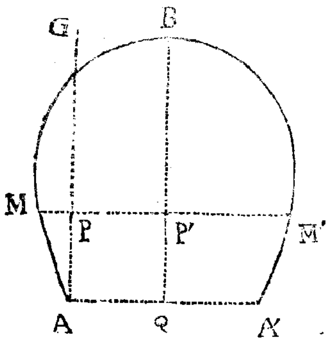
Zusatz II.



Laßt uns annehmen, die Klinge BA sei senkrecht in eine vertikale Ebne BH eingesteckt, und am Ende A hänge das Gewicht φ frei herunter, so wird die Richtlinie AG horizontal, die Abzisse AP wird auch horizontal, und die Applikate PM vertikal. Ist nun auf der anderen Seite eine ähnliche und gleiche Klinge BA′ mit einem gleichen

Gewichte

Gewichte φ', so ist die krumme Linie BA′ der BA ähnlich und gleich, folglich entstehet eine symmetrische Linie ABA′, deren Scheitel in B ist. Das nämliche geschiehet, wenn ABA′ eine einzige Klinge ist, die in ihrer Mitte B gestüßet, und an den Enden mit gleichen Gewichten beladen ist. Denn in diesem Falle vertritt die Gegenwirkung beider Hälften die Stelle der Ebne BH.



Es sei wiederum die Ebne BQ vertikal, und die Klinge BMA in dieselbe bei B horizontal eingestecket. Eine Kraft φ ziehe in der horizontalen Richtung AH, so wird die Direktriße AG vertikal. Es sei AP $= x$, so ist PM $= y$. Uebrigens bleibet die Gleichung

$$\partial y = \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{2}x^2\right)\partial x}{\sqrt{\left[E^2 - \varphi^2\left(a + \frac{1}{2}x^2\right)^2\right]}}$$

Wollte man die Abzissen auf der Linie QB nehmen, so bliebe QP′ $=$ AP $= x$. Hingegen die neue Applikate P′M, welche wir z nennen wollen, würde sein

$$z = P'P + PM$$

$$z = P'P + y$$

Es sei $\quad P'P = b$, so ist

$$z = b + y$$

$$\partial z = \partial y$$

Folg-

Folglich würde

$$\partial z = \frac{\varphi(a + \frac{1}{2}x^2)\partial x}{\sqrt{[E^2 - (a + \frac{1}{2}x^2)^2]}}$$

Die Gleichung bliebe demnach die nämliche, nur daß beim Integriren (wenn es anginge) eine andere beständige Größe heraus kommen würde.

Das zweideutige Wurzelzeichen giebt zu erkennen, daß zu jeder Abzisse QP′ zwei Applikaten P′M und P′M′ gehören, daß folglich die Linie zwei Zweige BMA und BM′A′ hat.

Der zweite mit dem ersteren ähnliche und gleiche Zweig entstehet, wenn man die Klinge BM′A′, welche mit BMA gleich und ähnlich ist, ebenfalls in B horizontal einstecket, und bei A′ in der Richtung A′Q mit einer gleichen Kraft φ ziehet; oder wenn man die einzige Klinge AMBM′A′, ohne daß sie in B gestützet sei, an ihren Enden nach den Richtungen AQ und A′Q ziehet; oder wenn man die Enden A und A′ der einzelnen Klinge AMBM′A′ mit einem Faden AA′ zusammen bindet.

§. 4.

Die beiden Linien, die wir in diesem Hauptstücke untersuchet haben, besitzen verschiedene merkwürdige Eigenschaften, die aber mehr zur Geometrie als zur Mechanik gehören. Z. E. in unserer höheren Geometrie haben wir bewiesen, daß die Kettenlinie unter allen Linien von gleicher Länge diejenige ist, die bei der Umwendung um ihrer Axe entweder die größte oder kleinste Fläche erzeuget, je nachdem man sie so beschreibet, daß sie gegen ihre Axe entweder konkav oder konvex ist. Eben daselbst ist auch bewiesen worden, daß die elastische Linie bei der Umwendung um ihre Axe einen größeren oder kleineren Körper erzeuget, als jede andere krumme Linie, die zur nämlichen Abzisse gehöret, die nämliche Länge hat, und den nämlichen Raum einschließet.

Ende der Statik.

Druckfehler.

Bisher habe ich in diesem Werke keine beträchtliche Druckfehler bemerket. Nur muß ich dem Leser anzeigen, daß, aus bloßem Versehen, unter der ersten Kolumne des A-Bogens erster Theil stehet; da doch diese Statik nicht mehr als einen Band ausmachet.

Bei dieser Gelegenheit will ich noch einige Druckfehler und Versehen nachholen, die ich in meiner **höheren Meßkunst**, beim Gebrauche derselben, gefunden habe. Solche Berichtigungen müssen dem Anfänger, der ein Buch gebrauchen will, allemal willkommen sein, indem sie ihm manchen Zweifel und manches überflüssige Nachsinnen ersparen.

Druckfehler im ersten Theile der höheren Meßkunst.

Vorrede, Seite XVIII, Zeile 2, anstatt **Eudorius** muß stehen **Eudorus**.

Vorrede, Seite XX, Zeile 5 und 7 von unten, stehet: **des Kegelschnitts, der in der Folge den Namen Parabel bekommen hat.** Man verbessere diese Stelle also: **des Kegelschnitts, der bei ihm und bei dem Apollonius am ersten unter dem Namen der Parabel erscheinet.**

Anmerkung. Da ich diese Stelle schrieb, hatte ich des Archimedes Werke nicht unter den Augen, wo das Wort Parabel häufig vorkömmt, und ich hielt mich an der gewöhnlichen Meinung, daß **Apollonius der Perger**, den Kegelschnitten ihre Namen gegeben hat.

Seite 58, Zeile 7, findet man

$$y^2 = \frac{n}{\gamma}(x^2 \mp \gamma x) \text{ anstatt } \frac{n}{\gamma}(\gamma x \mp x^2)$$

Seite 262, lezte Zeile, stehet $n z =$ anstatt $\mathrm{d} z =$. Dieser Druckfehler hat einen mir bekannten Leser einige Zeitlang in Verlegenheit gesezzet, weil das n in der vorhergehenden Gleichung enthalten ist.

Seite 313, 3te Zeile von unten, anstatt $\mathrm{d}^2 y$ lies $-\mathrm{d}^2 y$

Seite 330, Zeile 17, stehet **Konkav** anstatt **Konvex**.

Seite 331, Zeile 12, für $x^2 \mathrm{d} x$ lies $x \mathrm{d} x$.

n

Druckfehler im zweiten Theile der höheren Meßkunst.

Seite 4, Zeile 8, gerade Linie, muß heißen: krumme Linie.

Seite 4, Zeile 13 und 14, anstatt Applikate ließ Abzisse, und anstatt Abzisse setze Applikate.

Seite 24, Zeile 12 und 13, stehet ELK für ELH.

Seite 59, Zeile 13, stehet im ersten Exempel, für im lezten Exempel.

Seite 69, Zeile 3 von unten, anstatt x^x lies a^x.

Seite 77, Zeile 4, stehet am Ende — &c. und muß sein + &c.

Seite 88, Zeile 11, stehet der Rektangel für dem Rektangel.

Seite 100, in der 4ten Formel, stehet S′z anstatt T′z. Diesen Druckfehler habe ich zwar schon am Ende der höheren Meßkunst angezeiget; da er aber in einer Tabelle stehet, welche beim Integriren öfters gebrauchet werden kann, so halte ich es nicht für überflüssig, den Leser nochmals davor zu warnen.

Nachricht an den Buchbinder.

Das vorlezte Blatt im G-Bogen muß herausgeschnitten, und das umgedruckte an dessen Stelle eingeschaltet werden. Auch muß das gegenwärtige Blatt, worauf die Druckfehler stehen, nicht nach der Vorrede, sondern ganz am Ende des Buches angebracht werden.